# Lógica Matemática II. Tarea-Examen II.

**Prof. Rafael Rojas Barbachano.**
**Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.**

**18 - 10 - 2016**

## 1. Extensiones del Lenguaje y Expansiones de Estructuras

**1.1 (1 pto.)** Sean $\rho \subseteq \rho'$, $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \upharpoonright \rho$. Demuestra que:

- Para todo $\tau \in TRM_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$

  $\tau^{\mathfrak{A}}[s] = \tau^{\mathfrak{B}}[s]$

- Para toda $\alpha \in FRM_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$

  $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ sii $\mathfrak{B} \models \alpha[s]$

- Para todo $\sigma \in \mathscr{L}^0_\rho$

  $\mathfrak{A} \models \sigma$ sii $\mathfrak{B} \models \sigma$

**1.2 (1 pto.)** Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $s \in {}^\omega A$, $x \in VAR_\rho$. Demuestra que:

- Sea $\tau \in TRM_\rho$. Para todo $\theta \in TRM_\rho$, en el cual $x$ puede o no ocurrir, tenemos que:

  $\theta(x/\tau)^{\mathfrak{A}}[s] = \theta^{\mathfrak{A}}[s(x/\tau^{\mathfrak{A}}[s])]$

- Para cualquier $\alpha \in FRM_\rho$, en la cual $x$ puede ocurrir libre, tenemos que si $\tau \in TRM_\rho$, el cual es libre para $x$ en $\alpha$, entonces:

  $\mathfrak{A} \models \alpha(x/\tau)[s]$ sii $\mathfrak{A} \models \alpha[s(x/\tau^{\mathfrak{A}}[s])]$

Nota: Enuncie el caso particular en el que la única variable libre puede ser $x$ (por tanto no se necesita toda la asignación s) y el término es una constante.

## 2. Hiper-Reales e Hiper-Naturales

**2.1 (1 pto.)** $\mathfrak{R} \subseteq {}^*\mathfrak{R}$.
Es decir:

- $|\mathfrak{R}| = \mathbb{R} \subseteq g[A] = |{}^*\mathfrak{R}|$
- Si $P_R \in \mathscr{P}^n_\rho$, entonces $R = (P_R)^{\mathfrak{R}} = (P_R)^{{}^*\mathfrak{R}} \cap \mathbb{R}^n = {}^*R \cap \mathbb{R}^n$
- Si $F_f \in \mathscr{F}^n_\rho$, entonces $f = (F_f)^{\mathfrak{R}} = (F_f)^{{}^*\mathfrak{R}} \upharpoonright \mathbb{R}^n = {}^*f \upharpoonright \mathbb{R}^n$
- Si $C_r \in \mathscr{C}_\rho$, entonces $(C_r)^{\mathfrak{R}} = r = (C_r)^{{}^*\mathfrak{R}}$

**2.2 (4 pts.)** Sea $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, s, 0 \rangle$, sea $\rho = \{R_<, f_+, f_\cdot, f_s, c_o\}$ su tipo de semejanza.Demuestra que existe ${}^*\mathfrak{N} \in V_\rho$ tal que:

- $\|{}^*\mathfrak{N}\| = \aleph_0$
- ${}^*\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}$
- ${}^*\mathfrak{N} \not\cong \mathfrak{N}$

Hint: Expanda el tipo de semejanza $\rho$ agregando una nueva constante que al ser interpretada sea distinta de todos los naturales (estandar) y que sea mayor a todos los naturales (estandar).

Nota: Ademas de hacer la construcción de los Hiper-Naturales a detalle, es necesario que expliquen la aritmetica de esta nueva estructura, es decir, como se comporta la nueva constante agregada bajo los operadores del tipo de semejanza (aplicar sucesor, sumar y multiplicar con este nuevo elemento).

**2.3 (1 pto.)** $\mathfrak{N} \preceq {}^*\mathfrak{N}$.
Es decir:

- $\mathfrak{N} \subseteq {}^*\mathfrak{N}$
- Para toda $\alpha \in FRM_\rho$ y para todo $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$.

$$\mathfrak{N} \models \alpha[n_1, ..., n_k] \Leftrightarrow^* \mathfrak{N} \models \alpha[n_1, ..., n_k]$$

# 3. Modelos

**3.1 (1 pto.)** Sean $\Gamma \subseteq FRM_\rho$, $\gamma \in FRM_\rho$. $\Gamma \models \gamma$ sii $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ no es satisfacible.
En particular $\models \gamma$ sii $\{\neg\gamma\}$ no es satisfacible.

**3.2 (3 pts.)** Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $\mathfrak{B} \in V_\rho$, $|\mathfrak{A}| = A, |\mathfrak{B}| = B$ y $h : A \to B$.

- Si $h$ es un **homomorfismo**, entonces para todo $\tau \in TRM_\rho$, sean $a_1, ..., a_n \in A$.

$$h(\tau^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n]) = \tau^{\mathfrak{B}}[h(a_1), ..., h(a_n)]$$

- $h$ es un **homomorfismo**, entonces para toda $\alpha \in ATM_\rho$ y $a_1, ..., a_n \in A$.

$$\mathfrak{A} \models \alpha[a_1, ..., a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \alpha[h(a_1), ..., h(a_n)]$$

- $h$ es un **encaje** sii para toda $\alpha \in ATM_\rho$ y $a_1, ..., a_n \in A$.

$$\mathfrak{A} \models \alpha[a_1, ..., a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \alpha[h(a_1), ..., h(a_n)]$$