Lógica Matemática III. Tarea-Examen III.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.

10 - 11 - 2016

1. Teorías con Igualdad

1.1. (1.pto) Sea T una teoría donde $A6$ es válido y los siguientes enunciados son verdaderos.

- $A7$ es válido para $ATOM$ $\beta(x,x)$ donde no ocurren constantes ni letras funcionales y $\beta(x,y)$ se obtiene de reemplazar exactamente una ocurrencia de x por y en $\beta(x,x)$.
- $\vdash x = y \to f(z_1, ..., z_n) = f(w_1, ..., w_n)$.
  Donde f es una letra funcional de aridad n, $z_1, ..., z_n \in VAR$ y $f(w_1, ..., w_n)$ se obtiene de reemplazar exactamente una ocurrencia de x por y en $f(z_1, ..., z_n)$.

Entonces T es una Teoría con igualdad.

2. Completud-Correctud Extendido

2.1 (2 pts.) Sean T una teoría de Primer Orden, α, β fórmulas bien formadas, Γ un subconjunto de fórmulas bien formadas. Demuestra las siguientes afirmaciones.

- α es verdadera para cada modelo numerable $\mathfrak{A}$ de T sii $\vdash_T \alpha$
- Si cada modelo de T y cada asignación que satisfacen a Γ también satisfacen a α, entonces $\Gamma \vdash_T \alpha$
- Si $\Gamma \models \alpha$, entonces $\Gamma \vdash_T \alpha$
- Si $\beta \models \alpha$, entonces $\beta \vdash_T \alpha$

2.2 (2pts.) Sean α un enunciado, Γ un subconjunto de enunciados. Demuestra para $C.P$ que

- $\Gamma \vdash_{C.P} \alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha$

2.3 (4pts.) Demuestra que son equivalentes las siguientes versiones del Teorema de Correctud-Completud extendido para C, P.

- En $C.P.$ para cualquier α enunciado y Γ subconjunto de enunciados.
  - $\Gamma \models \alpha$ sii $\Gamma \vdash_{C.P.} \alpha$
- En $C.P.$ para toda α, β enunciados, Γ un subconjunto de enunciados.
  - Modus Ponens.
    $\alpha, (\alpha \to \beta) \vdash_{C.P.} \beta$

- Contradicción implica trivialidades.
  $\vdash_{C.P.} (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$
- $\vdash_{C.P.} (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$
- Meta Teorema de la Deducción.
  Si $\Gamma, \alpha \vdash_{C.P.} \beta$, entonces $\Gamma \vdash_{C.P.} \alpha \to \beta$
- Γ es $C.P.$-consistente sii Γ tiene Modelo

3. Modelos

3.1 (2pts.) Sea $\mathfrak{B} \in V_\rho$, $X \subseteq B = |\mathfrak{B}|$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- $X = A$ para alguna subestructura $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, donde $A = |\mathfrak{A}|$.
- Para toda $c \in C$, $c^{\mathfrak{B}} \in X$, para toda $f \in \mathscr{F}_n$, para toda n-ada $x_1, ..., x_n \in X$, $f^{\mathfrak{B}}(x_1, ..., x_n) \in X$

Si los dos incisos son verdaderos, entonces $\mathfrak{A}$ es única.