ESTRUCTURAS ELEMENTALES

El objetivo de este capítulo será establecer con todo rigor la sintaxis y la semántica de un Lenguaje Formal adecuado para cierto tipo de estructuras matemáticas. Algunos ejemplos de estas estructuras son:

$$\langle \mathbb{N} , < \rangle , \langle \mathbb{Z} , \leq \rangle , \langle \mathbb{Q} , > \rangle , \langle \mathbb{R} , \geq \rangle , \langle \wp(A) , \subseteq \rangle ;$$

$$\langle \mathbb{N} , s , 0 \rangle , \langle \mathbb{Z} , \_ - 1 , 0 \rangle ;$$

$$\langle \mathbb{Z} , + , \cdot , 0 , 1 \rangle , \langle \mathbb{Q} , + , \cdot , 0 , 1 \rangle , \langle \mathbb{R} , < , + , \cdot , 0 , 1 \rangle$$

$$\langle \wp(A) , \cup , \cap , \_^{c} , \emptyset , A \rangle$$

Antes de dar una definición rigurosa de este tipo de estructuras, pongamos en claro algunos conceptos.

En lo que sigue, sea A un conjunto no-vacío y $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Definición. Diremos que r es una *Relación n-aria sobre* A syss

$$r \subseteq A^{n}$$

Definición. Diremos que o es una *Operación n-aria sobre* A syss

$$o : A^{n} \rightarrow A$$

Definición. $\mathfrak{A}$ es una *Estructura Elemental* syss $\mathfrak{A} = \langle A , \mathcal{R} , \mathcal{O} , \mathcal{E} \rangle$, donde:

•) A es un conjunto no- vacío, llamado *Universo* o *Base* de $\mathfrak{A}$.

• •) $\mathcal{R}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de relaciones sobre A.

• • •) $\mathcal{O}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de operaciones sobre A.

• • • •) $\mathcal{E}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de elementos de A, llamados *Elementos Distinguidos* de $\mathfrak{A}$.

Los ejemplos anteriores los podemos *ver* como estructuras elementales.

1. $\langle \mathbb{N} , \{<\} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \mathbb{Z} , \{\leq\} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \mathbb{Q} , \{>\} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \mathbb{R} , \{\geq\} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \wp(A) , \{\subseteq\} , \emptyset , \emptyset \rangle$;

2. $\langle \mathbb{N} , \emptyset , \{s\} , \{0\} \rangle$, $\langle \mathbb{Z} , \emptyset , \{\_ - 1\} , \{0\} \rangle$;

3. $\langle \mathbb{Z} , \emptyset , \{+ , \cdot\} , \{0 , 1\} \rangle$, $\langle \mathbb{Q} , \emptyset , \{+ , \cdot\} , \{0 , 1\} \rangle$;

4. $\langle \mathbb{R} , \{<\} , \{+ , \cdot\} , \{0 , 1\} \rangle$;

5. $\left\langle \wp(A)\ ,\ \emptyset\ ,\ \left\{\cup\ ,\ \cap\ ,\ \_^{\mathbf{c}}\right\}\ ,\ \left\{\emptyset\ ,\ \mathbf{A}\right\}\right\rangle$.

NO-ejemplos,

6. La Geometría Euclideana Plana, no se puede ver como una estructura elemental.

7. Los Espacios Vectoriales, de principio, no se pueden trabajar como una estructura elemental.

8. Espacios Topológicos.

Más ejemplos,

9. $\left\langle \mathbb{Z}\ ,\ \{|\}\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset \right\rangle$ donde "|" es la divisibilidad entre Enteros.

10. $\left\langle \mathbb{R}\setminus\{0\}\ ,\ \emptyset\ ,\ \{\div\}\ ,\ \left\{\pi\ ,\ e^{-1}\right\}\right\rangle$.

11. $\left\langle \mathbb{N}\ ,\ \{\emptyset\}\ ,\ \{\_+41\}\ ,\ \left\{28\ ,\ 35\right\}\right\rangle$.

12. Las estructuras triviales :

a). $\left\langle A\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\right\rangle$ con A un conjunto cualquiera, pero no-vacío.

b). $\left\langle A\ ,\ \mathcal{R}_A\ ,\ \mathcal{O}_A\ ,\ A\right\rangle$ donde $A \neq \emptyset$; $\mathcal{R}_A$ es el conjunto de todas las relaciones sobre A; $\mathcal{O}_A$ es el conjunto de todas las operaciones sobre A y tiene a todos los elementos de A como elementos distinguidos (*Estructura Saturada de* A).

Nota. Sea $\mathfrak{A} = \left\langle A\ ,\ \mathcal{R}\ ,\ \mathcal{O}\ ,\ \mathcal{E}\right\rangle$ una estructuras elemental. En el caso en que,

1. $\mathcal{R} = \emptyset$, a la estructura $\mathfrak{A}$ se le llama *Estructura Algebraica.*

2. $\mathcal{O} = \emptyset = \mathcal{E}$, a la estructura $\mathfrak{A}$ se le llama *Estructura Multirrelacional.*

Tipo de Semejanza

Iniciamos la simbolización o formalización de los elementos constitutivos de las Estructuras Elementales.

Consideremos una estructura elemental arbitraria:

$$\langle A \, , \, \mathcal{R} \, , \, \mathcal{O} \, , \, \mathcal{E} \rangle$$

Necesitamos un símbolo para cada relación, uno para cada operación y otros para cada elemento distinguido. Y debido a que las relaciones y las operaciones tienen una determinada aridad, habrá que asociar a sus correspondientes símbolos un entero positivo.

Definición. ρ es un *Tipo de Semejanza* syss ρ es un conjunto, posíblemente vacío, de símbolos de la forma,

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \right) \cup \mathcal{C}$$

donde,

•) Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{P}_n$ es un conjunto de símbolos; llamados *Letras Predicativas.* Si $s \in P_n$, se dirá que s *es* o *tiene aridad* n.

• •) Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F}_n$ es un conjunto de símbolos; llamados *Letras Funcionales.* Si $s \in F_n$, se dirá que s *es* o *tiene aridad* n. Y

• • •) $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos; llamados *Constantes Individuales.*

Petición: Ningún símbolo es una sucesión finita de otros símbolos.

Ejemplos: …

Notación:

1. Usaremos las letras mayúsculas: P, Q, R, S, con índices y supraíndices, como *metavariables* para denotar -es decir, que variaran entre- las letras predicativas.

2. Usaremos las letras minúsculas: f, g, h, con índices y supraíndices, como *metavariables* para denotar letras funcionales.

3. Usaremos las letras minúsculas: c, d, e, con índices y supraíndices, como *metavariables* para denotar a las constantes individuales.

Interpretaciones de tipo ρ

Dado un tipo de semejanza ρ –como conjunto de símbolos formales que es– sus elementos son suceptibles de interpretarse. Pasemos ahora a decir oficialmente, como se interpretan.

Definición. $\mathfrak{A}$ es una *Interpretación de tipo* ρ, en breve, una ρ–*Interpretación* syss

$$\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$$

donde:

i). A es un conjunto no-vacio

ii). I es una función; llamada *Función de Interpretación y* es tal que tiene como domino a ρ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:

- **a**). Si $P \in \mathcal{P}_n$, entonces $I(P) \subseteq A^n$.
- **b**). Si $f \in \mathcal{F}_n$, entonces $I(f) : A^n \to A$
- **c**). Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $I(c) \in A$

Obsérvese que podemos asociar a cada ρ–interpretación una estructura elemental –la inducida por la imágen de I. También la llamaremos ρ–*Estructuras*.

Ejemplos: …

Notación:

i) Si $s \in \rho$, $s^{\mathfrak{A}} \rightleftharpoons I(s)$

ii) Si ρ es finito, digamos $\rho = \{s_1, \ldots, s_n\}$ escribiremos

$$\langle A , s_1^{\mathfrak{A}} , \ldots , s_n^{\mathfrak{A}} \rangle \rightleftharpoons \langle A, I \rangle$$

iii) Usaremos como metavariables:

- letras góticas (fraktur) mayúsculas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ para denotar ρ–estructuras. Y
- las letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ para denotar sus respectivos universos o bases.

iv) $V_\rho = \{\mathfrak{A} \ / \ \mathfrak{A} \text{ es una } \rho\text{–estructura}\}$ es el *Universo de las Estructuras o Interpretaciones de tipo* ρ.

Lenguajes Formales de Tipo ρ

Construiremos un Lenguaje Formal adecuado para poder "hablar" de las propiedades que tiene el universo de una estructura elemental.

En lo que sigue, fijemos un tipo de semejanza:

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \right) \cup \mathcal{C}$$

Definición$_1$. Un *Lenguaje (Formal de 1er. Orden) de Tipo* ρ, en breve un *ρ–Lenguaje,* $\mathcal{L}_\rho$, es un conjunto de símbolos de la forma:

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}_\rho & = & \rho & \text{(No–Lógicos)} \\ & \cup & \left\{ v_n \ / \ n \in \mathbb{N} \right\} & \text{(Variables)} \\ & \cup & \left\{ \ \approx \ \right\} & \text{(Igualdad)} \\ & \cup & \left\{ \neg \, , \ \& \ , \ \vee \ , \ \rightarrow \ , \ \leftrightarrow \ \right\} & \text{(Conectivos)} \\ & \cup & \left\{ \forall \, , \, \exists \right\} & \text{(Cuantificadores)} \\ & \cup & \left\{ \,) \, , \, (\, , \, ' \, \right\} & \text{(Auxiliares o de Puntuación)} \end{array}$$

Con la única condición de que un símbolo ***no*** *es una sucesión finita de otros símbolos.*

De ahora en adelante, entenderemos por una *Expresión de tipo* ρ, en breve, *una ρ–expresión,* a una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_\rho$, o dicho conjuntistamente, a una función con dominio un segmento inicial de los números naturales e imagen en $\mathcal{L}_\rho$.

Definición$_2$. e es una *Expresión de Tipo* ρ o una *ρ–Expresión* syss e es una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_\rho$.

Notación:

1. **VAR** $= \left\{ v_i \ / \ i \in \mathbb{N} \right\}$.

2. Usaremos las letras x, y, z, con índices, supraíndices, etc. como metavariables para denotar a las variables (a los elementos de **VAR**)

3. **EXP**$_\rho$ $= \left\{ e \ / \ e \text{ es una } \rho\text{–expresión} \right\}$

$= \left\{ e \ / \ e \text{ es una sucesión finita de símbolos de } \mathcal{L}_\rho \right\}$

$= \left\{ e \ / \ \text{hay un } n \in \mathbb{N},\ e : \{0, \ldots, n\} \to \mathcal{L}_\rho \right\}$

Ejemplos: …