Términos de tipo ρ.

En general, por un término entendemos que es una expresión que se usa para denotar a un elemento o individuo del "mundo" del discurso donde estemos trabajando.

Ejemplos:

$$0,\ \pi,\ x,\ c,\ 28+35,\ \sqrt[2]{-1}\,,\ 3x+2,\ ax^2+bx+c,\ \int_1^x \frac{1}{t}dt,\ \ldots$$

Así, un término es un elemento, una variable, el resultado de una operación sobre elementos, etc.

Pasemos a formalizar la noción de término. Ya tenemos a las variables formales, las constantes individuales y las letras funcionales. Una definición de término formal, la podemos dar en forma inductiva, es decir, pensarla como generada a partir de las variables y constantes y aplicar sucesivamente las letras funcionales.

Definición:

1. Las variables y las constantes individuales son ρ–*Términos*.

2. Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n$ son ρ–términos, entonces

$f(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ es un ρ–*Término*

3. Una ρ–expresión es un ρ–*Término* solo si se puede probar que lo es, sobre las bases de las condiciones **1** y **2**.

Notación:

1. $\textbf{TRM}_\rho = \left\{ e \in EXP_\rho \ / \ e \text{ es un } \rho\text{–término} \right\}$.

2. Usaremos la letra griega τ con índices, para denotar a los *términos de tipo* ρ, en corto, ρ–*términos*.

Una definición alternativa, de término formal, es una de corte conjuntista.

Definición. $\textbf{TRM}_\rho$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que:

I)

$$\textbf{VAR} \cup \mathcal{C} \subseteq \textbf{TRM}_\rho$$

Y

II) Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n \in \textbf{TRM}_\rho$, entonces

$$f(\tau_1,\ldots,\tau_n) \in \textbf{TRM}_\rho$$

Ejemplos: …

Debido a la forma en que se construyen los ρ–términos, hay asociado un principio de inducción:

Principio de Inducción sobre la formación de términos.

Sea $\wp$ una propiedad que "compete" a ρ–expresiones.

Si

I. Para cada $c \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\wp(c)$ y $\wp(v_n)$. Y

II. Para toda $f \in \mathcal{F}_n$ se tiene que, si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$ tales que cumplen con $\wp(\tau_1), \ldots, \wp(\tau_n)$, entonces también $\wp(f(\tau_1, \ldots, \tau_n))$,

entonces todos los ρ–términos tienen la propiedad $\wp$, es decir, para todo $\tau \in$ **TRM**$_\rho$, $\wp(\tau)$.

Como una primera aplicación de este principio tenemos,

Principio de Lectura Única para ρ–términos.

Sea $e \in$ **EXP**$_\rho$. Se tiene que, $e \in$ **TRM**$_\rho$ syss una y solo una de las siguientes condiciones se dá:

1. Hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $v_n = e$, o

2. Hay una $c \in \mathcal{C}$ tal que $c = e$, o

3. Hay un $n \in \mathbb{Z}^+$, una $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$ tales que $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = e$

Interpretación de un ρ–término

Si $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle \in V_\rho$ y $\tau \in$**TRM**$_\rho$ ¿cómo interpretamos a τ en $\mathfrak{A}$?

Si en τ no aparecen variables, la interpretación, en $\mathfrak{A}$, es relativamente obvia, lo único que hay que hacer es interpretar las letras funcionales y las constantes –como lo indica la función de interpretación, I– y efectuar las operaciones correspondientes sobre los elementos distinguidos obtenidos.

Pero si en el término aparece al menos una variable ya la interpretación no queda clara. Hay pues que decir cómo interpretar, la o las variables que aparecen en dicho término para poder, ahora sí, interpretarlo. Como queremos dar una definición de la interpretación de un término en general, tenemos que considerar a *todas* las variables y decir de golpe cómo se interpretan todas ellas. Para esto una,

Definición. Sea $\langle A, I \rangle \in V_\rho$. Diremos que s es una *Asignación de Valores a las Variables en A*, en breve, una *A–Asignación* syss

$$s : VAR \to A$$

Notación:

1. ${}^\omega A = \left\{ s \ / \ s : VAR \to A \right\}$.

2. Si $s \in {}^\omega A$ y $n \in \mathbb{N}$, $s_n \rightleftharpoons s(v_n)$.

3. Si $s \in {}^\omega A$, en algunas ocasiones escribiremos a s más explícitamente como

$$\left\langle s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots \right\rangle$$

Ahora, con estos elementos en la mano, pasemos a dar formalmente la,

Definición Recursiva de *Interpretación de un ρ–término τ, en una ρ–estructura $\mathfrak{A}$, bajo la A–asignación s*, denotada por $\tau^{\mathfrak{A}}[s]$.

I) Si $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathcal{C}$, entonces

$$v_n^{\mathfrak{A}}[s] = s_n \qquad \text{y} \qquad c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$$

II) Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$, entonces

$$(f(\tau_1, \ldots, \tau_n))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s])$$

Ejemplos: …

Al interpretar un término en una estructura bajo una A–asignación, lo único que nos interesa de la asignación es la interpretación de las variables que aparecen en dicho término y no más. El siguiente resultado nos ayuda a formalizar este hecho y su prueba se basa en el principio de inducción para términos.

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $s,\ s' \in {}^{\omega}A.$ Así, para todo ρ–término $\tau,$
Si s y s' coinciden en todas las variables que ocurren en $\tau,$ entonces

$$\tau^{\mathfrak{A}}[s] = \tau^{\mathfrak{A}}[s'] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\wp(\tau))$$

Prueba: Se hará por Inducción sobre la formación de términos.

I] **a**). Sea $c \in \mathcal{C}.$ Así, $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}}[s'].$ (Esto es para cualquier s y s').

b). Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el término, $v_n.$ Ahora, supongamos que s y s' son tales que $s_n = s(v_n) = s'(v_n) = s'_n.$ Pero entonces, $v_n^{\mathfrak{A}}[s] = s_n = s'_n = v_n^{\mathfrak{A}}[s'].$

II] Sea $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $\tau_1, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$ tales que cumplen con la **HI**. Ahora consideremos al término $\tau \rightleftharpoons f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ y sean s y s' dos A–asignaciones cuyos valores coinciden en todas las variables que ocurren en $\tau.$ De esto último y la **HI**, tenemos que $\wp(\tau_1), \ldots, \wp(\tau_n).$ Así,

$$\begin{aligned} f(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{\mathfrak{A}}[s] &= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s]) && \text{Def} \\ &= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s'], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s']) && \wp(\tau_i) \text{ y } f^{\mathfrak{A}} \text{ es función} \\ &= f(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{\mathfrak{A}}[s'] && \text{Def} \end{aligned}$$

†