Fórmulas

En lo que sigue, fijemos un tipo de semejanza.

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \right) \cup \mathcal{C}$$

Y consideremos su lenguaje, $\mathcal{L}_\rho$.

Pasamos ahora a simbolizar las primeras afirmaciones que podemos hacer, en nuestras estructuras, acerca de los elementos de ella. Ya contamos con símbolos para “hablar” de los elementos, los términos, y también para las relaciones, las letras predicativas.

Las primeras expresiones que serán básicas en nuestro lenguaje formal, se dan en forma oficial en la siguiente,

Definición$_3$. Una ρ–expresión e es una *Atómica, de tipo* ρ, en breve, una ρ*–Atómica,* syss

a). Hay $\tau_1, \tau_2 \in$ **TRM**$_\rho$, tales que $(\tau_1 \approx \tau_2) = e$. O

b). Hay $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$, tales que $P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = e$.

Ejemplos: …

Pasemos ahora a dar la definición (recursiva) de fórmula (bien formada) es decir, de aquellas expresiones que consideraremos como bien escritas.

Definición$_3$. **FRM**$_\rho$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que:

I) Contiene a todas las ρ–atómicas. Es decir,

Si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in$ **TRM** y $P \in \mathcal{P}_n$, entonces

$$(\tau_1 \approx \tau_2) \in \textbf{FRM}_\rho \quad \text{y} \quad P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in \textbf{FRM}_\rho$$

II) Es cerrado bajo conectivos y cuantificadores. Es decir,

a) Si $\alpha, \beta \in$ **FRM**$_\rho$, entonces

$$(\neg\alpha)\,,\ (\alpha\ \&\ \beta)\,,\ (\alpha \vee \beta)\,,\ (\alpha \rightarrow \beta)\,,\ (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \textbf{FRM}_\rho$$

b) Si $\alpha \in$ **FRM**$_\rho$ y $x \in$ **VAR**, entonces

$$(\forall x\, \alpha),\ (\exists x\, \alpha) \in \textbf{FRM}_\rho$$

A α se le llama el *Alcance del cuantificador* ($\forall x$ o $\exists x$, según el caso).

Notación: A los elementos de **FRM**$_\rho$ les llamaremos *Fórmulas de tipo* ρ o ρ*–Fórmulas*.

Ejemplos: …

Aquí también tenemos un principio de inducción.

Principio de Inducción sobre la formación de fórmulas.

Sea $\wp$ una propiedad que "compete" a ρ–expresiones.

Si

I) Todas las ρ–atómicas tienen la propiedad $\wp$, es decir:

a) Si $\tau_1, \tau_2 \in$ **TRM**$_\rho$, entonces $\wp((\tau_1 \approx \tau_2))$. Y

b) Si $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$, entonces $\wp(P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n))$.

Y

II) La propiedad se preserva bajo conectivas y cuantificadores, es decir:

a) Si $\alpha, \beta \in$ **FRM**$_\rho$ son tales que $\wp(\alpha)$ y $\wp(\beta)$,
entonces $\wp(\neg\alpha)$, $\wp(\alpha \ \& \ \beta)$, $\wp(\alpha \vee \beta)$, $\wp(\alpha \to \beta)$ y $\wp(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

b) Si $\alpha \in$ **FRM**$_\rho$ que cumple con $\wp(\alpha)$ y $x \in$ **VAR**,
entonces $\wp(\forall x\alpha)$ y $\wp(\exists x\alpha)$,

entonces toda ρ–fórmula tiene la propiedad $\wp$.

Usando este principio, podemos probar este otro,

Principio de Lectura Única para ρ–fórmulas:

Sea $e \in EXP_\rho$. Tenemos que, $e \in$ **FRM**$_\rho$ syss una y solo una de las siguientes condiciones se dá:

1. Hay $\tau_1, \tau_2 \in$ **TRM**$_\rho$ tales que $(\tau_1 \approx \tau_2) = e$, o
2. Hay $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in$ **TRM**$_\rho$, tales, que $P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = e$, o
3. Hay $\alpha \in$ **FRM**$_\rho$, tal que $(\neg\alpha) = e$, o
4. Hay $\alpha, \beta \in$ **FRM**$_\rho$, tales que $(\alpha \ \& \ \beta) = e$, o
5. Hay $\alpha, \beta \in$ **FRM**$_\rho$, tales que $(\alpha \vee \beta) = e$, o
6. Hay $\alpha, \beta \in$ **FRM**$_\rho$, tales que $(\alpha \to \beta) = e$, o
7. Hay $\alpha, \beta \in$ **FRM**$_\rho$, tales que $(\alpha \leftrightarrow \beta) = e$, o
8. Hay $\alpha \in$ **FRM**$_\rho$ y $n \in \mathbb{N}$, tales que $(\forall v_n\alpha) = e$, o
9. Hay $\alpha \in$ **FRM**$_\rho$ y $n \in \mathbb{N}$, tales que $(\exists v_n\alpha) = e$.

Convenciones sobre la notación

1. Utilizaremos letras griegas minúsculas: α, β, γ, φ, ψ, … para denotar ρ–fórmulas (a exepción de ρ, τ y ε).

2. Utilizaremos letras griegas mayúsculas, Σ, Γ, Δ, … para denotar conjuntos de ρ–fórmulas.

3. Reglas para suprimir paréntesis.

a. Los paréntesis externos, se pueden suprimir.

b. Los paréntesis en torno a la negación y a la cuantificación, se pueden suprimir.

c. Con respecto a la igualdad,

- **i**. Los paréntesis externos se pueden suprimir.
- **ii**. Escribiremos $\tau_1 \not\approx \tau_2$ en lugar de $\neg(\tau_1 \approx \tau_2)$

d. Cuando hay una iteración de la conjunción –o de la disyunción– la regla es la de asociación por la izquierda.

e. La conjunción y la disyunción *ligan* más que el condicional y el bicondicional.

f. Los cuantificadores *ligan* más que los conectivos.

4. Si $P \in \mathcal{P}_2$ y $f \in \mathcal{F}_2$. A veces escribiremos:

a. $xPy \leftrightharpoons P(x,y)$ y

b. $xfy \leftrightharpoons f(x,y)$

5. Algunas veces utilizaremos paréntesis cuadrados o corchetes:] y [

Ejemplos: …