Variables Libres y Acotadas

La forma cotidiana –por supuesto, en matemáticas– de usar las variables, envuelve dos maneras distintas. Veamos tres ejemplos:

I. Las integrales, en el plano real ($\mathbb{R}^2$),

1. $\int_1^x \frac{1}{t}dt$

a. $\int_1^y \frac{1}{t}dt$ **b**. $\int_1^x \frac{1}{s}ds$

Dicen lo mismo: **1**. y **b**.
Dicen cosas distintas: **1**. y **a**.

II. Las sumatorias, en los enteros ($\mathbb{Z}$),

2. $\sum_{i=1}^{n} a_i$

c. $\sum_{j=1}^{n} a_j$ **d**. $\sum_{i=1}^{m} a_i$

Dicen lo mismo: **2**. y **c**.
Dicen cosas distintas: **2**. y **d**.

III. Los polinomios con coeficientes en los racionales ($\mathbb{R}$),

3. $ax^2 + bx + c$

e. $ay^2 + by + c$ **f**. $a'x^2 + b'x + c'$

Dicen lo mismo: **3**. y **e**.
Dicen cosas distintas: **3**. y **f**.

Es claro que hay dos maneras distintas de usar una variable. Unas se llaman *Acotadas* y las otras *Libres.* Tratemos de entresacar algunas de sus propiedades.

Variable Acotada: Variable de “adeveras” o "muda"; una verdadera variable, puede tomar todos los valores –del dominio de variabilidad– pero ninguno en particular.
Variable Libre: Variable de “hule”, “aparente”, puede ser cualquier elemento del dominio de variabilidad, pero uno solo, inamovible durante el discurso.

Variable Acotada: Si se cambia la variable, por otra, *no* cambia el significado de la expresión.
Variable Libre: Si se cambia la variable, por otra, cambia el significado de la expresión.

Son variables acotadas: En **1**., $t.$ En **2**., $i.$ En **3**. $x.$

Son variables libres: En **1**., $x.$ En **2**., $n.$ En **3**., a, b y $c.$

Entrando al terreno de lo formal, pero todavía de manera coloquial, podemos decir que una ocurrencia de la variable x en una fórmula $\beta,$ es acotada en β syss dicha ocurrencia de $x,$ es la variable de un cuantificador que aparece en $\beta,$ o está en el alcance de algún cuantificador "$\forall x$" o "$\exists x$" perteneciente a una subfórmula de $\beta.$ Y será libre, dicha ocurrencia, en otro caso.

Una definición formal –con todo el rigor necesario– de variable libre o acotada, tiene que ser recursiva debido a la forma en que se definió ρ–fórmula. Hay varias maneras de hacerlo y aquí daremos dos. Para dar la primera necesitamos la noción de subfórmula de una fórmula.

Sea ρ un tipo de semejanza y $\mathscr{L}_\rho$ un lenguaje de tipo $\rho.$

Definición Recursiva del *Conjunto de Subfórmulas de una fórmula.*

I] Si α es una fórmula atómica, entonces la única *Subfórmula de* α *es* ella misma, $\alpha.$

II] **1**. Sean $\alpha,\ \beta \in FRM_\rho.$

$\neg$) Las *Subfórmulas de* $(\neg\alpha)$ *son* las subfórmulas de α y ella misma, $(\neg\alpha).$

$\square^{(*)}$) Las *Subfórmulas de* $\left(\alpha \,\square\, \beta\right)$ *son* las subfórmulas de $\alpha,$ las subfórmulas de β y ella misma, $\left(\alpha \,\square\, \beta\right).$

(*) Aquí hay que reemplazar el metasímbolo $\square$ por todos y cada uno de los conectivos: $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

2. Sean $\alpha \in FRM_\rho$ y $n \in \mathbb{N}.$

a) Las *Subfórmulas de* $\left(\forall v_n\, \alpha\right)$ *son* las subfórmulas de α y ella misma, $\left(\forall v_n\, \alpha\right).$

b) Las *Subfórmulas de* $\left(\exists v_n\, \alpha\right)$ *son* las subfórmulas de α y ella misma, $\left(\exists v_n\, \alpha\right).$

Con esta noción, podemos pasar a dar la definición formal de variable libre y acotada. Puesto que una variable puede ocurrir varias veces en una fórmula, la definición se hará para cada una de las ocurrencias.

Definición. Sean $x \in VAR$ y $\beta \in FRM_\rho.$ *Una ocurrencia de* x *en* $\beta,$ *es Acotada en* β syss hay una subfórmula de β de la forma $(\forall x\alpha)$ o de la forma $(\exists x\alpha)$ y dicha ocurrencia es la variable del cuantificador o la ocurrencia está en $\alpha.$

Pasemos a dar la otra parte.

Definición. Sean $\beta \in FRM_\rho$ y $x \in VAR_\rho$. *Una Ocurrencia de x en β es Libre, en β* syss dicha ocurrencia **no** es acotada en β. Y decimos que x *Ocurre Libre en β* syss x tiene al menos una ocurrencia libre en β.

Ejemplos: Sea $\rho = \{P\} \cup \{f\} \cup \{c\}$, donde $P \in \mathcal{P}_2$, $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Y Consideremos las siguientes ρ–fórmulas:

1. $P(x,y)$

2. $\exists z P(x,y)$

3. $\forall x P(x,y)$

4. $\exists x P(x,y) \rightarrow f(x) \approx c$

5. $\forall x\Big(P(x,y) \rightarrow \forall y P\big(f(x),y\big)\Big)$

En **1**. y en **2**. las únicas ocurencias de x y de y son líbres y la única ocurrencia de z, es acotada en **2**. En **3**., todas las ocurencias de x son acotadas y la única de y es libre. En **4**., las primeras dos ocurencias de x son acotadas y la última es libre; la única de y es libre. En **5**., todas las ocurencias de x (a saber 3) son acotadas, la primera de y es libre y las otras dos, son acotadas.

Pasemos ahora a dar una segunda manera de definir formalmente estas nociones; también tiene que ser recursiva y la daremos para la ocuurencia libre de una variable . Esta tiene un defecto; ya haremos los comentarios pertinentes.

Definición Recursiva de *Una Variable Ocurra Libre en una Fórmula.*

I] Sea α una ρ–atómica. La *Variable x Ocurre Libre en α* syss x ocurre en α.

II] **1**). Sean $\alpha,\ \beta \in FRM_\rho$.

$\neg$) La *Variable x Ocurre Libre en* $(\neg\beta)$ syss x ocurre libre en β.

$\square^{(**)}$) La *Variable x Ocurre Libre en* $\big(\beta \,\square\, \gamma\big)$ syss x ocurre libre en β u ocurre libre en γ.

(**) Ver al nota anterior (*)

2). Sean $\beta \in FRM_\rho$ y $x,\ y \in VAR$.

a) La *Variable x Ocurre Libre en* $(\forall y\beta)$ syss $x \neq y$ y x ocurre libre en β.

b) La *Variable x Ocurre Libre en* $(\exists y\beta)$ syss $x \neq y$ y x ocurre libre en β.

Obsérvese que lo que definimos es que “una variable ocurra libre en una fórmula”, pero no hemos dicho en que lugar ocurra. Por lo que una variable puede ocurrir libre y sin embargo tener ocurrencias que no son libres en la misma fórmula; p. e. vea **5**. Así, no es posible, de aquí, dar una definición de variable acotada. Sin embargo, si podemos dar una definición de uno de los conceptos más importantes que necesitaremos.

Definición. Sea $\sigma \in FRM_\rho$. Diremos que σ es un *Enunciado de Tipo* ρ, en breve, ρ–*Enunciado* syss todas las ocurrencias de sus variables no son libres.

Notación: $\mathcal{L}_\rho^n = \left\{\varphi \in \Phi_\rho \ / \ \text{en } \varphi \text{ aparecen } n \text{ variables libres}\right\}$

Como caso particular, $\mathcal{L}_\rho^0 = \left\{\sigma \in FRM_\rho \ / \ \sigma \text{ es un } \rho\text{–enunciado}\right\}$.