

Satisfacibilidad y Verdad

Antes de pasar a dar una definición rigurosa de cómo interpretar una fórmula necesitamos un poco de,

Notación y Convenciones:

1. Sean, $s \in {}^\omega A$, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Por $s(v_n / a)$ entenderemos a la “nueva” A -asignación que se obtiene a partir de s al quitar el valor s_n y poner en su lugar el valor a y dejar todo lo demás igual. En símbolos:

$$s(v_n / a) : VAR \rightarrow A$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, s(v_n / a)(v_i) = \begin{cases} a & \text{si } i = n \\ s_i & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

También lo podemos pensar así: $s(v_n / a) = \langle s_0, s_1, \dots, a, s_{n+1}, \dots \rangle$.

2. La notación anterior se generaliza en forma natural para: $s(v_{n_1} / a_1, \dots, v_{n_m} / a_m) \in {}^\omega A$, donde $s \in {}^\omega A$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ (distintos dos a dos), $m \in \mathbb{Z}^+$ y $a_1, \dots, a_m \in A$.

3. Cuando usemos metavariables sobre VAR , digamos x, y, z , la A -asignación $s(x / a, y / b, z / c)$ quedará clara en el contexto.

Definición Recursiva de Satisfacibilidad (TARSKI, 1936), $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$.

La ρ -fórmula α se Satisface en la ρ -estructura \mathfrak{A} , bajo la A -asignación s , o, La ρ -estructura \mathfrak{A} Satisface la ρ -fórmula α en (o bajo) la A -asignación s .

I) Si $P \in P_n$ y $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ son ρ -términos, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\tau_1 \approx \tau_2)[s] \quad \text{syss} \quad \tau_1^{\mathfrak{A}}[s] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[s]$$

$$\mathfrak{A} \models P(\tau_1, \dots, \tau_n)[s] \quad \text{syss} \quad \langle \tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s] \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$$

II) a) Si α y β son ρ -fórmulas, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\neg\alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \& \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \vee \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \not\models \alpha[s] \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)[s] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models (\beta \rightarrow \alpha)[s]$$

b) Si α es una ρ -fórmula y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\forall v_n \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \text{para todo } a \in A, \mathfrak{A} \models \alpha[s(v_n / a)]$$

$$\mathfrak{A} \models (\exists v_n \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \text{para algún } a \in A, \mathfrak{A} \models \alpha[s(v_n / a)]$$

Ejemplos: ...

Definición. Una ρ -fórmula α es *Verdadera* en una ρ -estructura \mathfrak{A} , o también, que \mathfrak{A} es *Modelo* de α syss α se satisface en \mathfrak{A} bajo cualquier A -asignación s . En símbolos,

$$\mathfrak{A} \models \alpha \quad \text{syss} \quad \text{para toda } A\text{-asignación } s, \mathfrak{A} \models \alpha[s]$$

Si una fórmula **no** es verdadera en una determinada estructura, entonces hay (al menos) una asignación a las variables que no la satisface. Esto no nos garantiza que ninguna asignación la satisface, es decir, podría haber asignaciones que si la satisficieran.

Definición. Una ρ -fórmula es *Falsa* en una ρ -estructura syss no se satisface en ninguna asignación, en dicha estructura. En símbolos,

$$\alpha \text{ es Falsa en } \mathfrak{A} \quad \text{syss} \quad \text{para toda } A\text{-asignación } s, \mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$$

Similar al comentario anterior tenemos que, si una fórmula **no** es falsa en una estructura, no necesariamente es verdadera, en dicha estructura. Con la nueva notación tenemos que el no ser verdadero no es ser falso y viceversa.

Definición. Una ρ -fórmula es *Universalmente Verdadera* syss α es verdadera en toda ρ -estructura. En símbolos,

$$\models \alpha \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \rho\text{-estructura } \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \models \alpha$$

Así, una fórmula es universalmente verdadera syss es satisfecha por cualquier asignación, a las variables, en cualquier interpretación que se dé y no lo será si hay una estructura y una asignación ahí, que no la satisfaga.

Definición. Una ρ -fórmula es *Universalmente Falsa* syss es Falsa en toda ρ -estructura. En símbolos,

$$\alpha \text{ es Universalmente Falsa} \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \rho\text{-estructura } \mathfrak{A}, \alpha \text{ es Falsa}$$

Por tanto, una fórmula es universalmente falsa syss no se satisface por ninguna asignación, a las variable, en cualquier interpretación. Y no lo será si hay una asignación, a las variables, en alguna interpretación, que la satisfaga.

Notación:

$$\mathcal{UV}_\rho = \left\{ \alpha / \alpha \text{ es una } \rho\text{-fórmula universalmente verdadera} \right\}$$

$$\mathcal{UF}_\rho = \left\{ \alpha / \alpha \text{ es una } \rho\text{-fórmula universalmente falsa} \right\}$$

Definición. Sea $\alpha \in FRM_\rho$.

Decimos que α es *Contingente* syss $\alpha \notin \mathcal{UV}_\rho$ y $\alpha \notin \mathcal{UF}_\rho$.

A las contingentes, también se les suelen llamar *Eventuales* o *Circunstanciales*.

Ejemplos: ...

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $\alpha, \beta \in FRM_\rho$. Así:

- I. a). α es falsa en \mathfrak{A} syss $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$.
 - b). $\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$ syss $\neg\alpha \in \mathcal{UV}_\rho$
 - c). $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\neg\alpha$ es falsa en \mathfrak{A} .
 - d). $\alpha \in \mathcal{UV}_\rho$ syss $\neg\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$
 - e). α es contingente syss $\neg\alpha$ es contingente
- II). No es el caso que ambas se den: $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$. Es decir, ninguna fórmula es verdadera y falsa en una ρ -interpretación.
- III). $\mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ y $\mathfrak{A} \models \alpha$, entonces $\mathfrak{A} \models \beta$.
- IV). $(\alpha \rightarrow \beta)$ es falsa en \mathfrak{A} syss $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \neg\beta$.
- V). $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha$.
 Esto se puede generalizar de la siguiente manera: Por la *Clausura* de α , denotado por $\bar{\alpha}$, entenderemos por la fórmula, cerrada o enunciado, que se obtiene de α , al anteponerle a ella todos los cuantificadores universales de las variables -en orden creciente- que ocurren libres en ella. Así, $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\mathfrak{A} \models \bar{\alpha}$.

Prueba: TAREA.

†

En forma similar a lo que nos ocurrió con los términos; al interpretar una fórmula específica, en una estructura y en una asignación determinada, lo que nos interesa son los valores que toman las variables libres que aparecen en dicha fórmula y no así los valores que la asignación les dá a las variables acotadas y mucho menos a las que no aparecen. Esto hecho lo capturamos en la siguiente,

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $s, s' \in {}^\omega A$. Así,

Para toda ρ -fórmula α se tiene que, si s y s' coinciden en todas las variables que ocurren libres en α , entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha [s] \text{ syss } \mathfrak{A} \models \alpha [s']$$

Prueba: TAREA (Sug. usar inducción sobre la formación de fórmulas). †

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ syss hay } s \in {}^\omega A \text{ tal que } \mathfrak{A} \models \sigma [s]$$

Prueba:

\Rightarrow] Sabemos que, $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ con $A \neq \emptyset$. Sea pues $a \in A$ y sea $s_a \in {}^\omega A$ la constante a , es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_a(v_n) = a$. Ahora, como $\mathfrak{A} \models \sigma$, en particular $\mathfrak{A} \models \sigma[s_a]$.

\Leftarrow] Supongamos que $s \in {}^\omega A$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma[s]$. Como $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$, sus variables no tienen ocurrencias libres y, por el resultado anterior, para cualquier otra $s' \in {}^\omega A$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \sigma[s']$, es decir $\mathfrak{A} \models \sigma$. †

Corolario. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. $\mathfrak{A} \models \sigma$ o σ es falso en \mathfrak{A} (y, por II, no ambos).
2. \mathfrak{A} es modelo de σ o \mathfrak{A} es modelo de $\neg\sigma$.