Equivalencia Lógica.

Definición₁. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Diremos que α es *Lógicamente Equivalente a* β, syss su bicondicional es una fórmula universalmente verdadera. En símbolos:

$$\alpha \equiv \beta \text{ syss } \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

Observaciones:

1. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Así,

$\alpha \equiv \beta$ syss $\models \alpha \leftrightarrow \beta$

syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$, $\mathfrak{A} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[s]$

syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ syss $\mathfrak{A} \models \beta[s]$.

2. Sean $\sigma, \delta \in \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

$\sigma \equiv \delta$ syss $\models \sigma \leftrightarrow \delta$

syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho \left[\mathfrak{A} \models \sigma \text{ syss } \mathfrak{A} \models \delta\right]$.

Dos enunciados, son equivalentes syss son verdaderos en las mismas estructuras.

Proposición₁. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Si $\alpha \equiv \beta$, entonces tenemos que,

$$\models \alpha \text{ syss} \models \beta.$$

Prueba: Utilizando nuestra definiciones, tenemos que: $\models \alpha$ syss $\models \beta$ es lo mismo que: para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ syss para toda $\mathfrak{B} \in V_\rho$ y toda $t \in {}^{\omega}B$, $\mathfrak{B} \models \beta[t]$. El resultado se sigue inmediatamente. †

Tarea. Pruebe que la conversa de la proposición anterior, no es cierta.

La relación de equivalencia lógica establece, efectivamente, una relación de equivalencia sobre el conjunto de ρ–fórmulas:

Proposición₂. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$.

i). $\alpha \equiv \alpha$,

ii). Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\beta \equiv \alpha$, y

iii). Si $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \gamma$, entonces $\alpha \equiv \gamma$.

Principio de Sustitución de Fórmulas Equivalentes.

Si en una fórmula sustituimos una subfórmula por una fórmula lógicamente equivalente a ella, obtenemos una fórmula lógicamente equivalente a la fórmula inicial.

Implicación Lógica.

Definición$_2$. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Diremos que α *Implica Lógicamente a* β, syss el condicional es una fórmula universalmente verdadera. En símbolos:

$$\alpha \models \beta \text{ syss } \models \alpha \rightarrow \beta$$

A α se le llama *Hipótesis* y a β *Conclusión*.

Observaciones:

1. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Así,

$\alpha \models \beta$ syss $\models \alpha \rightarrow \beta$

syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$, $\mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)[s]$

syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$, si $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$, entonces $\mathfrak{A} \models \beta[s]$.

2. Sean $\sigma, \delta \in \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

$\sigma \models \delta$ syss $\models \sigma \rightarrow \delta$

syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$, si $\mathfrak{A} \models \sigma$, entonces $\mathfrak{A} \models \delta$.

Corolario$_3$. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Así,

1) $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ syss $\alpha \equiv \beta$ o equivalentemente,

2) $\models \alpha \rightarrow \beta$ y $\models \beta \rightarrow \alpha$ syss $\models \alpha \leftrightarrow \beta$

Proposición$_4$. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Si $\alpha \models \beta$, entonces tenemos que,

$$\text{Si } \models \alpha, \text{ entonces } \models \beta.$$

Tarea. Pruebe que la conversa de la proposición anterior, no es cierta.

La relación de implicación lógica, sobre el conjunto de las ρ–fórmulas, es reflexiva y transitiva, pero no es antisimétrica (¿Por qué?) por tanto no llega a ser un orden parcial (reflexivo) solamente es un pre–orden.

Proposición$_5$. Sean $\alpha, \beta \in FORM_\rho$. Así,

i). $\alpha \models \alpha$,

ii). Si $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$.

iii). Puede ser que $\alpha \models \beta$, $\beta \models \alpha$ y que $\alpha \neq \beta$.