Consecuencia Lógica y Satisfacibilidad.

Ahora generalizaremos la noción de implicación lógica para un mayor número de hipótesis.

Definición$_3$. Sea $\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq FORM_\rho$.

$\Gamma \models \beta$ syss para cada $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y cada $s \in {}^\omega A$,
si para toda $\alpha \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \models \alpha\,[s]$ entonces $\mathfrak{A} \models \beta\,[s]$

En tal caso, diremos que β es *Consecuencia (Lógica)* del conjunto Γ.

Observaciones: Sea $\Gamma \cup \Sigma \cup \left\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\right\} \subseteq FRM_\rho$. Así,

1. $\Sigma \not\models \beta$ syss hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una $s \in {}^\omega A$, tales que $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ para todo $\alpha \in \Sigma$ pero, $\mathfrak{A} \not\models \beta\,[s]$ o equivalentemente, $\mathfrak{A} \models \neg\beta\,[s]$

2. $\emptyset \models \beta$ syss $\models \beta$ (es decir, $\emptyset \models \beta$ syss $\beta \in \mathcal{UV}_\rho$)

3. $\{\alpha\} \models \beta$ syss $\alpha \models \beta$.

Notación: Sea $\left\{\alpha_1, \ldots,\ \alpha_n,\ \beta\right\} \subseteq FORM_\rho$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \quad \rightleftharpoons \quad \left\{\alpha_1, \ldots,\ \alpha_n\right\} \models \beta$$

4. $\beta,\ \neg\beta \models \gamma$, cualquiera sea $\gamma \in FRM_\rho$.

5. $\alpha,\ (\alpha \to \beta) \models \beta$.

6. $(\alpha\ \&\ \beta) \models \alpha$ y $(\alpha\ \&\ \beta) \models \beta$.

7. $(\alpha\ \&\ \beta) \models \gamma$ syss $\alpha,\ \beta \models \gamma$

8. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in FORM_\rho$. Así,

$$\left\{\alpha_1, \ldots,\ \alpha_n\right\} \models \beta \quad \text{syss} \quad \alpha_1 \& \ldots \& \alpha_n \models \beta$$

9. Si $\alpha \in \Sigma$, entonces $\Sigma \models \alpha$.

10. Si $\Gamma \supseteq \Sigma$ y $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Gamma \models \alpha$.

11. Si $\models \beta$, entonces $\Delta \models \beta$, cualquiera sea $\Delta \subseteq FRM_\rho$.

12. Si para todo $\alpha \in \Sigma$, $\Gamma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$ entonces $\Gamma \models \beta$.

Como hemos visto el conjunto de fórmulas está partido en las universalmente verdaderas, las universalmente falsas y las contingentes. Hay un tipo especial de fórmulas que nos interesa estudiar y son las que son verdaderas "puntualmente".

Definición$_4$. Sea $\alpha \in FORM_\rho$. α es *Satisfacible* syss
hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una $s \in {}^{\omega}A$ tales, que $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$.

Observación: Sea $\alpha \in FORM_\rho$.

1. α no es satisfacible syss para toda $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y toda $s \in {}^{\omega}A$ se tiene que
$$\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$$
2. α no es satisfacible syss $\alpha \in \mathcal{UF}$ syss $\neg\alpha \in \mathcal{UV}$
3. α es satisfacible syss $\alpha \notin \mathcal{UF}$ syss $\neg\alpha \notin \mathcal{UV}$
4. $\neg\alpha$ no es satisfacible syss $\neg\alpha \in \mathcal{UF}$ syss $\alpha \in \mathcal{UV}$
5. $\neg\alpha$ es satisfacible syss $\alpha \notin \mathcal{UV}$ syss $\neg\alpha \notin \mathcal{UF}$

Generalizamos la noción de satisfacibilidad de una fórmula para un conjunto de éllas.

Definición$_5$. Sea $\Sigma \subseteq FRM_\rho$. Diremos que Σ es *Satisfacible* syss
hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una $s \in {}^{\omega}A$ tales, que para toda $\alpha \in \Sigma$, se tiene $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$.

Nos interesa el siguiente caso particular.

Definición$_6$. Una ρ–interpretación $\mathfrak{A}$ es *Modelo* de un conjunto Σ de ρ–fórmulas syss $\mathfrak{A}$ hace verdaderas a todas las fórmulas de Σ. En símbolos:
$$\mathfrak{A} \models \Sigma \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \alpha \in \Sigma,\ \mathfrak{A} \models \alpha$$

Observación: Para el caso en que $\Sigma = \{\alpha\}$, tenemos,
$$\mathfrak{A} \models \{\alpha\} \text{ syss } \mathfrak{A} \models \alpha$$

Veamos algunas propiedades para enunciados.

Proposición$_6$. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

1. $\mathfrak{A} \models \sigma$ syss hay $s \in {}^{\omega}A$, tal que $\mathfrak{A} \models \sigma\,[s]$.
2. σ es satisfacible syss σ tiene un modelo.
3. Σ es satisfacible syss Σ tiene un modelo.
4. Σ **no** es satisfacible syss si en cada ρ–interpretación al menos un enunciado de Σ es falso.
5. $\Sigma \models \sigma$ syss cada modelo de Σ, es un modelo de σ.
6. $\Sigma \not\models \sigma$ syss hay un modelo de Σ en el cual σ es falso.

Proposición$_7$. Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

1. $\Sigma \models \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ no es satisfacible. O, equivalentemente,

2. $\Sigma \not\models \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ tiene un modelo.

Prueba: Veamos **2**. Pero, esta es inmediata de la propiedad **6** anterior y del hecho de que un enunciado falso en una estructura es equivalente a que su negación sea verdadera en dicha estructura. †

Proposición$_8$. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

1. Σ tiene un modelo syss hay un $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$ tal, que $\Sigma \not\models \sigma$. O equivalentemente,

2. Σ no es satisfacible o no tiene modelo syss para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, $\Sigma \models \sigma$.

Prueba: Si Σ tiene un modelo, entonces ninguna contradicción es consecuencia lógica de él –p.e. $\Sigma \not\models \neg(v_0 \approx v_0)$. Otro ejemplo, si $\alpha \in \Sigma$, se tiene que $\Sigma \not\models \neg\alpha$ (aquí se necesita que $\Sigma \neq \emptyset$). El “regreso” es inmediato de la definición de $\models$. †

Proposición$_9$. *(Metateorema –Semántico– de la Deducción)*.
Sea $\Sigma \cup \{\sigma, \delta\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

1. Si $\Sigma \models \sigma \to \delta$, entonces $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \delta$.

2. Si $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \delta$, entonces $\Sigma \models \sigma \to \delta$.

Prueba: **1** es inmediato. Veamos **2**.

Supongamos pues que, $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \delta$. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, veamos que $\mathfrak{A} \models \sigma \to \delta$. Tenemos dos casos: Si σ es falsa en $\mathfrak{A}$, entonces $(\sigma \to \delta)$ es verdadera en $\mathfrak{A}$. Si σ es verdadera en $\mathfrak{A}$, entoces $\mathfrak{A}$ satisface $\Sigma \cup \{\sigma\}$ y por nuestra suposición, δ será verdadera en $\mathfrak{A}$, con lo que también el enunciado $(\sigma \to \delta)$. En ambos casos, tenemos lo que queríamos. †