Consecuencia Finita y Finitamente Satisfacible.

En lo que sigue trabajaremos solamente con enunciados y sea

$$\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$$

Definición$_7$. Diremos que Σ es *Finitamente Satisfacible* syss todo subconjunto finito de Σ es satisfacible, o equivalentemente, todo subconjunto finito de Σ tiene un modelo.

Observaciones:

1. Si Σ es finito, entonces las nociones de satisfacible y finitamente satisfacible coinciden y por tanto, el caso que nos interesará es cuando Σ es infinito.

2. Si Σ es satisfacible, entonces Σ es finitamente satisfacible.

¿La conversa de **2**. es cierta? es decir:

¿Si Σ es finitamente satisfacible, entonces Σ es satisfacible?

La respuesta es: **SI**. Hay que probarlo y se llama "**M**eta **T**eorema de **C**ompacidad".

Como hemos hecho ver en la sección anterior, las nociones de satisfacibilidad y la de consecuencia lógica, están estrechamente relacionadas (ver la **Prop$_7$**). Ahora, para la noción de finitamente satisfacible, hay otra. Antes,

Notación: $\wp_\omega(A) = \left\{B \subseteq A \ / \ B \text{ es finito}\right\}$

Definición$_8$. Diremos que σ es *Consecuencia Finita* de Σ, lo cual denotaremos por $\Sigma \models_f \sigma$, syss σ es consecuencia de un subconjunto finito de Σ. En símbolos,

$$\Sigma \models_f \sigma \text{ syss hay } \Gamma \in \wp_\omega(\Sigma) \text{ tal, que } \Gamma \models \sigma.$$

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que,

$$\text{Si } \Sigma \models_f \sigma, \text{ entonces } \Sigma \models \sigma$$

La conversa de la anterior también es cierta pero ya no es inmediata. Bajo la suposición del **MTC**, se tiene que si $\Sigma \models \sigma$, entonces $\Sigma \models_f \sigma$. De hecho, como veremos más adelante, estas dos propiedades son equivalentes.

Observaciones:

1). Si Σ es finito, las nociones de consecuencia y consecuencia finita, coinciden.

Si Σ es finito, entonces $\Sigma \models \sigma$ syss $\Sigma \models_f \sigma$

2). Si $\sigma \in \Sigma$, entonces $\Sigma \models_f \sigma$.

3). $\emptyset \models_f \sigma$ syss $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \cap \mathcal{UV}_\rho$.

Veamos ahora la parte finitista correspondiente a la **Pro$_7$** y a otras más.

Proposición$_{10}$. Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

1. $\Sigma \models_f \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ no es finitamente satisfacible. O,
2. $\Sigma \not\models_f \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ es finitamente satisfacible.

Prueba: Probaremos **2**.

$\Sigma \not\models_f \sigma$	syss	para todo $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$, $\Gamma \not\models \sigma$	**Def**. $\not\models_f$
	syss	para todo $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$, $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ es sat	**Prop$_7$**
	syss	para todo $\Delta \in \wp_\omega(\Sigma \cup \{\neg\sigma\})$, Δ es sat	inmediato
	syss	$\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ es finitamente satisfacible	**Def**. FinSat †

Proposición$_{11}$. $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Si Σ es finitamente satisfacible, entonces $\Sigma \cup \{\sigma\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ es finitamente satisfacible.

Prueba. (Por reducción al absurdo.) Supongamos que tanto $\Sigma \cup \{\sigma\}$ como $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ no son finitamente satisfacibles. Hay pues, un $\Gamma_1 \in \wp_\omega(\Sigma \cup \{\sigma\})$ y un $\Gamma_2 \in \wp_\omega(\Sigma \cup \{\neg\sigma\})$ que no son satisfacibles. Ahora bien, puesto que Σ es finitamente satisfacible esto obliga a que,

$$\Gamma_1 = \Gamma_1' \cup \{\sigma\} \text{ y } \Gamma_2 = \Gamma_2' \cup \{\neg\sigma\}$$

con $\Gamma_1', \Gamma_2' \in \wp_\omega(\Sigma)$. Pero entonces, $\Gamma_1' \cup \Gamma_2' \in \wp_\omega(\Sigma)$ y por tanto satisfacible. Hay pues una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal, que $\mathfrak{A} \models \Gamma_1' \cup \Gamma_2'$. Y como σ es un ρ-enunciado resultaría que $\mathfrak{A} \models \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \{\sigma\}$ o que $\mathfrak{A} \models \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \{\neg\sigma\}$, ambos casos son absurdos. $\underset{\circ}{\nabla}$!! †

Veamos ahora un resultado que repetidamente usaremos más adelante; antes recordemos:

Sea $\langle A, \leq \rangle \in COPO$. Decimos que B *es una* $\leq$*–Cadena en* A syss $B \subseteq A$ y $\dot\forall\ a,b \in B\left[a \leq b \text{ o } b \leq a\right]$.

Proposición$_{12}$. La unión de una $\subseteq$–cadena de conjuntos finitamente satisfacibles, es finitamente satisfacible.

Prueba: Sea $B = \left\{\Gamma_i \subseteq \mathcal{L}^0_\rho \ / \ i \in I\right\}$ una $\subseteq$–cadena de conjuntos finitamente satisfacibles, en $\wp(\mathcal{L}^0_\rho)$. Veamos que $\bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_i$ es finitamente satisfacible. Sea pues

$\Delta \in \wp_\omega\left(\bigcup_{i\in I}\Gamma_i\right)$. Como Δ es finito y B es una cadena, hay un $i_0 \in I$, tal que $\Delta \subseteq \Gamma_{i_0}$. Por hipótesis, Γ_{i_0} es finitamente satisfacible, por lo que Δ es satisfacible. †

Pasemos ahora a trabajar con algunas nuevas nociones, que interesan a los conjuntos de enunciados, como son la de ser teoría y la de ser completa; junto con las versiones finitistas, por supuesto.

Definición$_9$. *La Cerradura bajo Consecuencias.*

a). $\Sigma^{\models} = \left\{\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0 \ / \ \Sigma \models \sigma\right\}$.

b). $\Sigma^{\models_f} = \left\{\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0 \ / \ \Sigma \models_f \sigma\right\}$.

Observaciones:

4). $\Sigma \subseteq \Sigma^{\models_f} \subseteq \Sigma^{\models}$.

5). $(\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UV}_\rho) \subseteq \Sigma^{\models_f} \subseteq \Sigma^{\models}$.

6). $(\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UV}_\rho)^{\models_f} = (\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UV}_\rho)^{\models} = (\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UV}_\rho)$.

7). $(\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UF}_\rho)^{\models_f} = (\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UF}_\rho)^{\models} = \mathcal{L}_\rho^0$.

Definición$_{10}$.

a). Σ es una *Teoría* syss $\Sigma = \Sigma^{\models}$.

b). Σ es una *f–Teoría* syss $\Sigma = \Sigma^{\models_f}$.

Observaciones:

8). Σ es una teoría syss $\Sigma^{\models} \subseteq \Sigma$ syss $\forall\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ $\left[\text{Si } \Sigma \models \sigma \ , \ \text{entonces } \sigma \in \Sigma\right]$.

9). Σ es una *f*–teoría syss $\Sigma^{\models_f} \subseteq \Sigma$ syss $\forall\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ $\left[\text{Si } \Sigma \models_f \sigma \ , \ \text{entonces } \sigma \in \Sigma\right]$.

10). Si Σ es una teoría, entonces es una *f*–teoría.

Ejemplos:

1. $\mathcal{L}_\rho^0 \cap \mathcal{UV}_\rho$ es tanto teoría, como *f*–teoría.

2. $\mathcal{L}_\rho^0$ es tanto teoría, como *f*–teoría.

3. $\Sigma^{\models}$ es una teoría y $\Sigma^{\models_f}$ es una *f*–teoría.

Definición$_{11}$.

a). Σ es *Completa* syss cqsea $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$, se tiene que $\Sigma \models \sigma$ o que $\Sigma \models \neg\sigma$.

b). Σ es *f–Completa* syss cqsea $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, se tiene que $\Sigma \models_f \sigma$ o que $\Sigma \models_f \neg\sigma$.

Observación.

11). Si Σ es f–completa, entonces es completa.

Ejemplos:

1. $\mathcal{L}^0_\rho \cap \mathcal{UV}_\rho$ es una teoría que **NO** es completa.
2. $\mathcal{L}^0_\rho$ es una teoría f–completa.
3. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y

$$TEO(\mathfrak{A}) = \left\{\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \ / \ \mathfrak{A} \models \sigma\right\}$$

Así, $TEO(\mathfrak{A})$ es una teoría completa.

Pasemos a ver el último resultado de esta sección, el cual será de gran utilidad más adelante.

Proposición$_{13}$. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Así,

1. Si para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, $\sigma \in \Sigma$ o $\neg\sigma \in \Sigma$,
   entonces Σ es f–completa.
2. Si Σ es una f–teoría y f–completa,
   entonces para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, $\sigma \in \Sigma$ o $\neg\sigma \in \Sigma$.
3. Si Σ es finitamente satisfacible y para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, $\sigma \in \Sigma$ o $\neg\sigma \in \Sigma$,
   entonces Σ es una f–teoría (f–completa).

Prueba: **1**. y **2**. son imediatas. Veamos **3**. Sea $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$ tal que $\Sigma \models_f \sigma$, demostremos que $\sigma \in \Sigma$. Si $\sigma \notin \Sigma$, por hipótesis, $\neg\sigma \in \Sigma$, pero entonces $\Sigma \models_f \neg\sigma$, lo cual haría que Σ no fuera finitamente satisfacible $\underset{\circ}{\nabla}$!! †

Obsérvese que la conversa de **3**. no es cierta.