

Extensión del Lenguaje Formal Y Expansión de Estructuras

En lo que sigue, sean ρ y ρ' tipos de semejanza y consideraremos, por ende, sus lenguajes (formales de primer orden) \mathcal{L}_ρ y $\mathcal{L}_{\rho'}$ respectivamente.

Definición₁. $\mathcal{L}_{\rho'}$ es la ρ' -Extensión de \mathcal{L}_ρ , o \mathcal{L}_ρ es la ρ -Contracción de $\mathcal{L}_{\rho'}$ syss

$$\rho \subseteq \rho'$$

Observaciones. Si $\rho \subseteq \rho'$, entonces

- a). $\mathcal{L}_\rho \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}$,
- b). $EXP_\rho \subseteq EXP_{\rho'}$,
- c). $FRM_\rho \subseteq FRM_{\rho'}$,
- d). $\mathcal{L}_\rho^0 \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}^0$.
- e). Si previamente están fijados los tipos, tanto las contracciones como las extensiones, son únicas.

Notación:

1. Si $E \subseteq EXP_\rho$,

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \{s \in \rho \mid \text{hay una } \rho\text{-expresión } e \in E, \text{ tal que en } e \text{ aparece } s\} \\ &= \{\text{símbolos no-lógicos que aparecen en alguna } \rho\text{-expresión de } E\} \end{aligned}$$

2. Si $\mathfrak{A} \in V_\rho$, denotaremos su universo por, $\|\mathfrak{A}\|$. O cuando no se preste a confusión, como siempre, usaremos la letra mayúscula A .

Definición₂. Supongamos que $\rho \subseteq \rho'$ y $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$.

La estructura \mathfrak{A} es *El Reducto de \mathfrak{B} a ρ* , syss

1. $\mathfrak{A} \in V_\rho$,
2. $\|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{B}\|$ (o bien, $A = B$) y
3. Para todo $s \in \rho$, $s^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{B}}$.

Notación: Si \mathfrak{A} es el reducto de \mathfrak{B} a ρ , lo denotaremos por $\mathfrak{B} \upharpoonright \rho$.

Ejemplos: ...

Definición₃. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Diremos que \mathfrak{B} es una ρ' -*Expansión* de \mathfrak{A} syss

1. $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$,
2. $\rho' \supseteq \rho$ y
3. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \upharpoonright \rho$.

Notación: $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{A}, \{s^{\mathfrak{B}} / s \in \rho' \setminus \rho\} \rangle$.

Ejemplos: ...

Observaciones:

1. Los reductos son únicos.
2. Si $\rho \subseteq \rho'$ y $\mathfrak{A} \in V_\rho$, siempre hay una ρ' -*expansión* de \mathfrak{A} .
Pues, sean $a_0 \in \|\mathfrak{A}\| = A$ y

$$\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{A}, \{s^{\mathfrak{B}} / s \in \rho' \setminus \rho\} \rangle$$

donde:

- a. Si $s \in \mathcal{P}_{\rho' \setminus \rho}^n$, entonces $s^{\mathfrak{B}} = \langle \langle a_0, a_0, \dots, a_0 \rangle \rangle \subseteq A^n$
- b. Si $s \in \mathcal{F}_{\rho' \setminus \rho}^n$, entonces $s^{\mathfrak{B}} : A^n \rightarrow A$ tal,
que para todo $x \in A^n$, $s^{\mathfrak{B}}(x) = a_0$ y
- c. Si $s \in \mathcal{C}_{\rho' \setminus \rho}$, entonces $s^{\mathfrak{B}} = a_0$.

3. Hay muchas maneras de expandir una estructura a un tipo de semejanza dado.

Proposición. Sean $\rho \subseteq \rho'$, $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$ y $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \upharpoonright \rho$. Así,

I. Para todo $\tau \in TRM_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$,

$$\tau^{\mathfrak{A}}[s] = \tau^{\mathfrak{B}}[s]$$

II. Para toda $\alpha \in FRM_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$,

$$\mathfrak{A} \models \alpha[s] \text{ syss } \mathfrak{B} \models \alpha[s]$$

III. Para todo $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$, se tiene que,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ syss } \mathfrak{B} \models \sigma$$

Prueba: TAREA.

Sug. Las pruebas de I y II son directas, usando los principios de inducción sobre la formación de términos y de fórmulas, respectivamente. Y III es inmediata de II. †

Este resultado nos dice que la verdad de los enunciados depende *únicamente* de los símbolos no-lógicos que aparecen en él.

El siguiente resultado lo vamos a necesitar más adelante.

Proposición (Metateorema de Sustitución).

Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $s \in {}^\omega A$ y $x \in VAR$. Así,

1. Sea $\tau \in TRM_\rho$. Para todo $\theta \in TRM_\rho$, en el cual x puede ocurrir o no, se tiene que

$$\theta(x / \tau)^{\mathfrak{A}}[s] = \theta^{\mathfrak{A}}[s(x / \tau^{\mathfrak{A}}[s])]]$$

2. Para cualquier $\alpha \in FRM_\rho$, en la cual x puede ocurrir libre, se tiene que si $\tau \in TRM_\rho$, el cual es libre para x en α , entonces

$$\mathfrak{A} \models \alpha(x / \tau)[s] \text{ syss } \mathfrak{A} \models \alpha[s(x / \tau^{\mathfrak{A}}[s])]]$$

TAREA:

- a). Pruebe el resultado anterior. **Sug.** utilizar inducción sobre la formación de dichas expresiones.
- b). Enuncie el caso particular en el que la única variable libre puede ser x (y por tanto no se necesita toda la asignación s) y el término es una constante.