Álgebras Booleanas

Y la lógica matemática

1 Motivación

La definición de una semántica para los lenguajes de primer orden no solo cumple con el objetivo central de crear un lenguaje para hablar de los objetos matemáticos en cuestión, sino que dota al lenguaje de una estructura lógica bastante rica. Las relaciones de consecuencia lógica y consecuencia tautológica imponen entre las fórmulas una organización que no es más que la "concretización" de la lógica clásica intuitiva. Las álgebras booleanas son una abstracción de este género de estructuras, en donde la lógica clásica se encuentra plasmada en las relaciones que cumplen las operaciones del álgebra.

En esta sección presentamos (de manera informal, error que se corregirá en la seccion 3) como es que se induce esta estructura sobre las fórmulas. En primer lugar damos una lista de definiciónes para estandarizar y recordar.

Definición Sea α una fórmula, $\mathfrak{A}$ una estructura y s una asignación ($s \in^{\mathbb{N}} \mathfrak{A}$). Se dice que s satisface a α si $\mathfrak{A} \vDash \alpha[s]$.

Definición Sea α una fórmula y Γ un subconjunto de fórmulas. Se dice que α es una consecuencia lógica de Γ si toda estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación $s \in^{\mathbb{N}} \mathfrak{A}$ que satisface las formulas de Γ, también satisface a α. Se denota $\Gamma \vDash \alpha$.

Definición En el caso en que $\Gamma = \{\beta\}$ se escribe $\beta \vDash \alpha$.

Definición Dos fórmulas α y β son logicamente equivalentes si $\alpha \vDash \beta$ y $\beta \vDash \alpha$. Se denota $\alpha \equiv \beta$

Definición Una fórmula α es universalmente válida, si toda asignación de toda estructura la satisface.

La consecuencia lógica es de capital importancia, lleva codificada la información acerca de los razónamientos logicamente válidos ("si se cumple esto entonces seguramente esto otro"). Ademas si dos fórmulas son logicamente equivalentes, es lo mismo afirmar que se cumple una a que se cumpla la otra. Si estamos tratando una teoría axiomática, nos interesan las fórmulas que son consecuencia lógica del conjunto de axiomas pues son estas fórmulas las que deberán de ser ciertas en cualquier modelo de nuestra teoría, son las verdades matemáticas del objeto de estudio.

La relación de logicamente equivalente es una relación de equivalencia. Aquí es donde nace la algebreización del lenguaje, pues si consideramos a las fórmulas módulo la relación de logicamente equivalente, es decir el conjunto $FRM_\rho/_\equiv = \{[\alpha]_\equiv | \alpha \in FRM_\rho\}$, es posible darle la forma de una álgebra booleana, llamada el álgebra de Lindenbaum para las universalmente válidas.

Cuestiones a cerca de la estructura proposicional de las fórmulas pueden ser estudiadas a través del concepto de los bloques y las asignaciones de verdad. Los bloques representan proposiciones en el sentido clásico, esto es que al ser interpretadas (en cualquier lugar, ya no solo en las estructuras matemáticas) son verdaderas o falsas. Es por esto que se define naturalmente las asignaciones de verdad:

Definición Una asignación de verdad es una función $V : \mathbb{B}_\rho \to \{0,1\}$

Esta función debe de entenderse como una interpretación posible de las fórmulas de manera que un bloque es verdad cuando obtiene el valor 1 y es falso en el otro caso. De esta manera podemos identificar las interpretaciones posibles de nuestro lenguaje, en su aspecto proposicional (lo que está pasando es que un lenguaje de primer orden tiene contenido, a traves de los bloques, un lenguaje del cálculo proposicional como se verá más adelante), con las asignaciones de verdad.

Los conectivos lógicos $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg\}$ forman un grupo de las relaciones más comunes que podemos establecer entre las proposiciones básicas. A partir de los bloques y estos conectivos lógicos se construyen todas las fórmulas (es más, las fórmulas estan libremente generadas por los conectivos lógicos a partir de los bloques), por lo cual el concepto de asignación de verdad se puede extender a todas las fórmulas. En una fórmula compuesta, su verdad dependerá de los valores de verdad de los bloques que la componen y como están ligados por los conectivos.

Proposición 1.1 *Sea V una asignación de verdad, entonces existe una única función $V' : Form_\rho \to \{0,1\}$ tal que:*

1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{B}_\rho$ se da que $V(\alpha) = V'(\alpha)$*
2. *(a) $V'(\alpha \to \beta) = H_\to(V'(\alpha), V'(\beta))$*

   (b) $V'(\alpha \leftrightarrow \beta) = H_\leftrightarrow(V'(\alpha), V'(\beta))$

   (c) $V'(\alpha \wedge \beta) = H_\wedge(V'(\alpha), V'(\beta))$

   (d) $V'(\alpha \vee \beta) = H_\vee(V'(\alpha), V'(\beta))$

   (e) $V'(\neg\alpha) = H_\neg(V'(\alpha))$

Donde $\{H_\to, H_\leftrightarrow, H_\wedge, H_\vee, H_\neg\}$ son los siguientes operadores sobre el conjunto $\{0,1\}$:

$H_\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

$H_\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$H_\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$H_\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

	$H_\neg$
0	1
1	0

Las asignaciónes de verdad definen una clase de fórmulas muy especiales, las tautologias, y además fabrican una tela de relaciones en el lenguaje con las cuales podemos construir otra estructura, semejante al álgebra de lindenbaum para las universalmente válidas.

Definición Sea α una fórmula. Cuando una asignación de verdad V es tal que $V'(\alpha) = 1$, (donde V' es la única extensión de V a las fórmulas como en la proposición 1.1) entonces se dice que V satisface a α.

Definición Sea α una fórmula. Se dice que α es una tautología toda asignación de verdad la satisface.

Definición Sea α una fórmula y $\Gamma \subset FRM_\rho$. Se dice que α es una consecuencia tautológica de Γ si para toda asignación de verdad V que satisfaga a las fórmulas de Γ satisface tambien a α. Lo denotare asi $\Gamma \Vdash \alpha$.

Definición Dos fórmulas α y β son tautológicamente equivalentes si $\alpha \Vdash \beta$ y $\beta \Vdash \alpha$.

Si consideramos ahora las fórmulas módulo la relación de ser tautológicamente equivalentes, que de nuevo es una relación de equivalencia, obtenemos otro conjunto al cual se le puede dotar una estructura de álgebra booleana. Estas dos álgebras booleanas son distintas puesto que la relación de ser tautologicamente equivalente es mas fuerte que la de ser logicamente equivalente (hay fórmulas que son logicamente equivalentes pero no tautologicamente equivalentes) aunque estan muy emparentadas. Sin embargo hasta que no hayamos desarrollado el lenguaje de las álgebras booleanas no podre precisar este punto.

Todo esto se ha hecho en términos completamente semánticos, que se refiere a la asignación de un significado al lenguaje. Sin embargo, nuestro objetivo será, el de dar una sintaxis al lenguaje, de tal forma que al construir las estructuras análogas correspondientes, estas simulen de la manera más aproximada a está estructura que conocemos y tenemos por ideal (en cierta manera, la estructura semántica es la estructura platónica de la matemática clásica).

Dicho esto nos adentramos primero en la teoría de las álgebras booleanas, para luego poder estudiar el caso concreto de las álgebras anunciadas. Construiremos nuevas álgebras booleanas a partir de una sintaxis introducida en aras de reconstruir las viejas álgebras booleanas y con esto demostraremos importantes teoremas.

2 Álgebras Booleanas

2.1 Definiciónes

Las álgebras booleanas se pueden introducir de dos maneras diferentes: uno a traves de una relación de orden que cumple ciertos axiomas; otra a traves de operaciones sobre un conjunto que satisfacen ciertas ecuaciones. Las dos definiciónes son equivalentes, lo cual será el resultado principal de esta subsección, por lo que en un futuro podremos utilizar cualquiera de las dos definiciónes.

Definición Una retícula es una pareja ordenada $(A, \leq)$ tal que $(A, \leq)$ es un orden parcial, y donde todo par de objetos $\{x, y\}$ tiene ínfimo y supremo.

Ya que en un orden parcial los ínfimos y los supremos de existir son únicos podemos introducir la siguiente notación: $inf\{x, y\} = x \wedge y$, $sup\{x, y\} = x \vee y$.

Nota La notación de ínfimo y supremo puede ser un poco confusa puesto que son los mismos símbolos que utilizan como conectivos lógicos, sin embargo tengo que subrayar que no son iguales. Unos son símbolos de un lenguaje formal, mientras que los otros son símbolos que representan operaciones en un conjunto. Uso esta notación ya que es la más usual en los libros de álgebras booleanas.

Ejercicio 2.1 *Demuestre que en una retícula todo conjunto finito tiene supremo e ínfimo.*

Ejercicio 2.2 *Demuestre que en una retícula se cumplen las siguiente ecuaciones:*

1. $x \wedge x = x = x \vee x$ *idempotencia*
2. $x \wedge y = y \wedge x$ *conmutatividad*
3. $x \vee y = y \vee x$
4. $x \wedge (y \vee x) = x = x \vee (y \wedge x)$ *leyes de absorción*
5. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ *asociatividad*
6. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

Ejercicio 2.3 *En una retícula $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$. Dualmente $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$.*

Ejemplo 1. Los subespacios de un espacio vectorial V junto con la inclusión forma una retícula.

2. Los numeros enteros con el orden de la división ($n \leq m$ si y solo si $n|m$) es una retícula.(¿Quienes son el supremo y el ínfimo de dos numeros?).

3. Cualquier orden total es una retícula.

4. Sea X un conjunto, entonces el conjunto potencia con el orden de la inclusión es una retícula.

Hay retículas que tienen elemento máximo y/o elemento mínimo. De haber un elemento máximo, dado que es único, lo llamaremos 1; y para el elemento mínimo usaremos 0.

Definición Sea x un elemento de una retícula A con máximo y mínimo, se dice que y es un complemento de x si $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$.

Definición Una retícula A es complementada si tiene máximo, mínimo y todo elemento tiene un complemento.

Ejercicio 2.4 *Compruebe que los ejemplos 1 y 4 son retículas complementadas. Demuestre que un orden total con máximo y mínimo es complementado si y solo si a lo más tiene dos elementos.*

Ejercicio 2.5 *Sea A una retícula con 0 y 1. Demuestre que:*

1. $x \wedge 0 = 0$
2. $x \vee 1 = 1$
3. $x \wedge 1 = x = x \vee 0$

Los subespacios de un espacio vectorial nos da un ejemplo de una retícula complementada, sin embargo un elemento de esta retícula puede tener mas de un complemento. Por ejemplo si consideramos $V = \mathbb{R}^2$ entonces cualesquiera dos subespacios de la forma $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = ay\}$ y $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = by\}$, con a y b numeros reales positivos distintos, son espacios complementarios. Sin embargo existe una condición sobre la retícula que garantiza la unicidad de los complementos.

Definición Una retícula A es distributiva si se satisfacen las siguiente ecuaciones:

1. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Proposición 2.6 *En una retícula distributiva los complementos son únicos.*

Demostración Sea x un elemento de la retícula, y z_1, z_2 complementos de x. Entonces:

$$z_1 = z_1 \wedge 1 = z_1 \wedge (x \vee z_2) = (z_1 \wedge x) \vee (z_1 \wedge z_2) = 0 \vee (z_1 \wedge z_2) = (z_1 \wedge z_2)$$

Por lo que, del ejercicio 2.3 concluimos que $z_1 \leq z_2$. De manera análoga uno obtiene $z_2 \leq z_1$, por lo tanto $z_1 = z_2$ □

La proposición anterior nos concede el poder darle un nombre al complemento de un elemento. Si un elemento x de una retícula distributiva tiene complemento, al complemento lo denotaremos $\neg x$.

Definición Una álgebra booleana es una retícula distributiva complementada con al menos dos elementos.

Ejemplo

5. $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ con el orden $0 \leq 0$, $0 \leq 1$ y $1 \leq 1$ es una álgebra booleana. (Note que este es el conjunto de valores de verdad y que $\neg x = H_\neg(x)$, $inf\{x, y\} = H_\wedge(x, y)$, $sup\{x, y\} = H_\vee(x, y)$)

6. El conjunto potencia de cualquier conjunto no vacío, junto con la inclusión es una álgebra booleana. Este es el ejemplo arquetípico de las álgebras booleanas. Existe un teorema, llamado el teorema de representación de Stone que establece que las álgebras de conjuntos potencia son bastante genéericas en el sentido de que toda

álgebra booleana ”es” una subálgebra de alguna de estas (pronto definiremos lo que significa ser subálgebra).

7. Sea X un conjunto no vacío. El conjunto de los conjuntos finitos junto con los cofinitos es una álgebra booleana. Esto es, si Cof(X)= $\{Y \subset X | X \setminus Y$ es finito$\}$ y Fin(X)= $\{Y \subset X | Y$ es finito$\}$, entonces $K_X =$ Cof(X) $\cup$ Fin(X) con el orden inducido por la inclusión es una álgebra booleana.
8. En un espacio topológico, los conjuntos que son abiertos y cerrados simultaneamente forman un conjunto llamado el álgebra característica del espacio topológico, que con la inclusión forma un álgebra booleana.

Ejercicio 2.7 *Demuestre que si A es un álgebra booleana, entonces para todo $x, y \in A$ se cumple:*

1. $\neg\neg x = x$
2. $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
3. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

La relación de orden en un álgebra booleana genera tres diferentes operaciones sobre el conjunto, llamadas $\wedge, \vee, \neg$, cuyas propiedades están enunciadas en algunos de los ejercicios. El siguiente teorema nos dice que en realidad basta con suponer que nuestro conjunto tiene estas tres operaciones que cumplen algunas de las propiedades demostradas.

Teorema 2.8 *Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Entonces son equivalentes:*

1. *A es una álgebra booleana. Esto es A tiene un orden parcial $\leq$ tal que $(A, \leq)$ es una retícula distributiva complementada.*
2. *A tiene tres operaciones $\wedge : A \times A \to A$, $\vee : A \times A \to A$, $\neg : A \to A$, y dos objetos distinguidos 0,1, que satisfacen las siguientes ecuaciones:*
   - *(a)* $x \wedge y = y \wedge x$ *y* $x \vee y = y \vee x$ — *conmutatividad*
   - *(b)* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ *y* $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ — *asociatividad*
   - *(c)* $x \wedge x = x = x \vee x$ — *idempotencia*
   - *(d)* $x \wedge (y \vee x) = x$ — *ley de absorción*
   - *(e)* $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ — *distributividad*
   - *(f)* $x \wedge 1 = x$ — *1 es neutro*
   - *(g)* $\neg x \wedge x = 0$ *y* $\neg x \vee x = 1$ — *no contradicción y tercero excluido.*

Demostración La demostración de que 1. implica 2. esta contenida en los ejercicios 2.2, 2.5 y la definición de una retícula distributiva complementada. Vale la pena observar que las operaciones de complemento, ínfimo y supremo están bien definidas ya que estos son únicos gracias a la proposición 2.6 . Asi que supongamos que tenemos un conjunto con al menos dos elementos que satisface 2.

El ejercicio 2.3 nos da una pista de como debemos de definir el orden en A. Sea $\leq \subseteq A \times A$ definida como $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$. Entonces lo primero que debemos de comprobar es que $\leq$ así definida es una relación de orden. La idempotencia (c) asegura que la relación es reflexiva. Para la transitividad supongamos que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \wedge y = x$ y $y \wedge z = y$ por lo que $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$ (asociatividad (2)). Falta probar que $\leq$ es antisimétrica; sean x, y tales que $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = x \wedge y = y \wedge x = y$ (conmutatividad (1)).

Hasta ahora sabemos que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, veamos que tiene ínfimos y supremos de pares de elementos. Sean $x, y \in A$, propongo a $x \wedge y$ como el ínfimo y a $x \vee y$ como el supremo.

$x \wedge y$ es el ínfimo: $x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y) = x \wedge y$ y $y \wedge (x \wedge y) = y \wedge (y \wedge x) = (y \wedge y) \wedge x = y \wedge x = x \wedge y$ por lo que $x \wedge y \leq x$ y $x \wedge y \leq y$. Sea $z \in A$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$, lo cual se traduce a $z \wedge x = z$ y $z \wedge y = z$; entonces $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$, por lo tanto $z \leq x \wedge y$.

$x \vee y$ es el supremo. $y \wedge (x \vee y) = x$ por la ley de absorción (d). $x \wedge (x \vee y) = x \wedge (y \vee x) = x$ por la misma razón. Por lo tanto $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$. Sea $z \in A$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$, entonces $(x \vee y) \wedge z = z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \vee y$ (distributividad (e)) por lo que $x \vee y \leq z$.

A tiene máximo y mínimo: 1 es máximo ya que $x \wedge 1 = x$ (1 es neutro (f)). 0 es mínimo puesto que $0 \wedge x = (\neg x \wedge x) \wedge x = \neg x \wedge (x \wedge x) = \neg x \wedge x = 0$.

Usaremos para demostar la distributividad de A que se satisface la otra ley de absorción ($x \vee (y \wedge x) = x$), por lo que lo demostramos aquí:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge x) &= (x \vee y) \wedge (x \vee x) \\ &= x \wedge (y \vee x) = x \end{aligned}$$

A es una retícula distributiva: falta demostrar que se cumple la otra distributividad $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Esto se sigue de la otra distributividad:

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= (x \wedge (x \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee z)) \\ &= x \vee ((y \wedge x) \vee (y \wedge z)) \\ &= (x \vee (y \wedge x)) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee (y \wedge z) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (g) nos aseguran que A es una retícula complementada, por lo que A es una retícula distributiva y complementada con al menos dos elementos. A es una álgebra booleana. $\square$

Es importante notar que en la equivalencia construida en la proposición anterior la conexión entre las operaciones álgebraicas y el orden parcial es $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$. Si esto se cumple, se sigue que $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ y que $x \vee y = \sup\{x, y\}$. En lo que sigue, se usaran ambas caracterizaciónes libremente.

2.2 Homomorfismos

En esta subsección nuestro enfoque será el siguiente: estudiar las álgebras según su contexto en el mundo de las álgebras booleanas. Definiremos las relaciones relevantes en el mundo de las álgebras booleanas.

Definición Un morfismo de álgebras booleanas es una función $f : A \to B$ entre álgebras booleanas que preserva la estructura de álgebra booleana, es decir:

1. $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
2. $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
3. $f(\neg x) = \neg f(x)$

Ejercicio 2.9 *Sea $f : A \to B$ un morfismo de álgebras booleanas. Demuestre que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.*

Ejercicio 2.10 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos de álgebras booleanas. Demuestre que $g \circ f$ es un morfismo de álgebras booleanas.*

Ejercicio 2.11 *Demuestre que todo morfismo de álgebras booleanas preserva el orden. Esto es si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$*

Ejemplo

1. Para cualquier álgebra booleana A existe un único morfismo $f : \mathbf{2} \to A$, dado por $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
2. Sea X un conjunto no vacío. Entonces la inclusión $i : K_X \to \wp(X)$ es un morfismo de álgebras booleanas.
3. Sean $X \subset Y$ dos conjuntos no vacíos. Entonces la función $f_X : \wp(Y) \to \wp(X)$ dada por $f_X(A) = A \cap X$ es un morfismo de álgebras booleanas.

Ejercicio 2.12 *Demuestre que los ejemplos son morfismos de álgebras booleanas.*

Hay algunas clases de morfismos de álgebras booleanas (de ahora en adelante omitiré el "de álgebras booleanas") que merecen ser mencionadas.

Definición Un morfismo $f : A \to B$ es un epimorfismo (o epi) si f es suprayectiva.

Definición Un morfismo $f : A \to B$ es un monomorfismo (o mono) si f es inyectiva.

Definición Un morfismo $f : A \to B$ es un isomorfismo (o iso) si f es mono y epi.

En el caso de que exista un isomorfismo entre dos álgebras booleanas A y B, decimos que A y B son isomorfas (se escribe $A \simeq B$). La relación de isomorfía es claramente de equivalencia y de hecho, en el estudio de las álgebras booleanas, es casi la relación de identidad. Dos álgebras isomorfas son esencialmente la misma cosa, pero con nombres distintos. Cualquier propiedad (de álgebras booleanas) que se cumpla en una álgebra booleana, inmediatamente se cumple en todas las álgebras que son isomorfa a ella.

Ejercicio 2.13 *Sea $f : A \to B$ un morfismo. Demuestre que son equivalentes:*

1. *f es mono.*
2. *Para todo par de morfismos $h, g : C \to A$ si $fg = fh$ entonces g=h (f se puede cancelar por la izquierda).*

Los morfismos dejan en el álgebra dominio mucha información acerca de su comportamiento. Dadas sus restricciones estructurales, el morfismo induce dos subconjuntos del dominio con algunas propiedades algebráicas interesantes. Estos subconjuntos son la preimagen del 0 (llamado el núcleo) y la preimagen del 1 (cuyo nombre en inglés es shell).

Definición El núcleo de un morfismo $f : A \to B$ es la preimagen del 0. $Nuc(f) = f^{-1}(0) = \{x \in A | f(x) = 0\}$. El shell es la preimagen del 1. $Sh(f) = f^{-1}(1) = \{x \in A | f(x) = 1\}$.

Notemos que si $x, y \in Nuc(f)$ entonces $x \vee y \in Nuc(f)$, que $0 \in Nuc(f)$ y que si $x \in Nuc(f)$ y $z \leq x$ entonces $z \in Nuc(f)$. Análogamente para el Shell(f) se cumplen las siguientes tres propiedades: $1 \in Sh(f)$, si $x, y \in Sh(f)$ entonces $x \wedge y \in Sh(f)$, y si $x \in Sh(f)$ y $x \leq z$ entonces $z \in Sh(f)$.

Definición Un subconjunto de un álgebra booleana $I \subseteq A$ es un ideal si:

1. $0 \in I$.
2. Si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$.
3. Si $x \in I$ y $y \leq x$ entonces $y \in I$.

Definición Un subconjunto de un álgebra booleana $F \subseteq A$ es un filtro si:

1. $1 \in F$.
2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$.
3. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.

Nota Una álgebra booleana es una estructura dual. Esto significa que al invertir el orden que define al álgebra $(A, \leq)$ obtenemos otra álgebra booleana. Es decir $(A, \geq)$ es una algebra booleana (Ejercicio). Cuando hayamos demostrado algún hecho de una algebra booleana, inmediatamente se cumple el enunciado dual (el que se refiere al álgebra dual $(A, \geq)$). En el álgebra dual el ínfimo se convierte en el supremo, el supremo en el ínfimo el 0 en 1 y el 1 en 0, por lo que para obtener el enunciado dual basta con sustituir cada ocurrencia de $\wedge$ por $\vee$, cada ocurrencia de $\vee$ por $\wedge$ y permutar 0 con 1. Por ejemplo, un ideal es el concepto dual de un filtro.

Ejemplo 1. A es un filtro y un ideal.

2. $\{0\}$ es un ideal, llamado el ideal trivial. Análogamente $\{1\}$ es el filtro trivial.

3. Si $a \in A$ entonces $a \downarrow = \{y \in A | y \leq a\}$ es un ideal. $a \uparrow = \{x \in A | a \leq x\}$ es un filtro.

4. Sea X un conjunto infinito. Entonces $Fin(X) \subset \wp(X)$ es un ideal. Cof(X) es un filtro.

Los ideales y los filtros no son las únicas subestructuras de una álgebra booleana. De hecho existe una mas natural, la de subálgebra:

Definición Sea A una álgebra booleana y $B \subseteq A$. Se dice que B es una subálgebra de A si B es no vacío y B es cerrado bajo las operaciones. Es decir:

1. si $a, b \in B$ entonces $a \vee b \in B$.
2. si $a, b \in B$ entonces $a \wedge b \in B$.
3. si $a \in B$ entonces $\neg a \in B$.

Ejercicio 2.14 *Demuestre que toda subálgebra de una álgebra booleana contiene al conjunto* $\{0, 1\}$.

Ejercicio 2.15 *Sea* $f : A \to B$. *Demuestre que* $Im(f) = f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ *es una subálgebra de B.*

La observacíon que nos llevo a esta definición dice entonces que todo morfismo de álgebras booleanas induce un ideal y un filtro en el álgebra dominio. ¿Qué importancia tienen estos ideales y filtros? Supongamos que tengo un filtro F, o un ideal I, ¿Existirá un morfismo tal que Nuc(f)=I, o Sh(f)=F?. La respuesta a estas pregunta nos lleva a demostrar una serie de teoremas muy imporantes llamados los teoremas de isomorfismos.

Responderemos la primer pregunta. Notemos que si $y \in Nuc(f)$ y $x \in A$ entonces $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(x) \vee 0 = f(x)$, y que si $x, y \in A$ son tales que $f(x) = f(y)$ entonces $x \wedge \neg y, y \wedge \neg x \in Nuc(f)$.

Ejercicio 2.16 *Sean* $x, y \in A$. *Definimos la diferencia simétrica como* $x \Delta y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$. *Demuestre que* $x \vee (x \Delta y) = y \vee (x \Delta y)$. *Concluya que* $f(x) = f(y)$ *si y solo si* $x \Delta y \in Nuc(f)$.

El ejercicio anterior expresa que los conjuntos $\{a \vee j | j \in Nuc(f)\}$ caen, bajo la función, en un mismo punto, y que si dos elementos caen en un mismo punto entonces estan en el mismo conjunto. Es decir, los conjuntos $\{a \vee j | j \in Nuc(f)\}$ forman una partición de A. Con toda partición viene una relación de equivalencia, que en este caso es la siguiente:

$x \sim_{Nuc(f)} y$ si y solo si existe $j \in Nuc(f)$ tal que $x \vee j = y \vee j$.

Y como consecuencia la definición de esta relación de equivancia, $x \sim_{Nuc(f)} y$ si y solo si f(x)=f(y).

Análogamente para el shell, podemos definir la siguiente relación:

$x \sim_{Sh(f)} y$ si y solo si existe $k \in Sh(f)$ tal que $x \wedge k = y \wedge k$

Ejercicio 2.17 *Duemuestre que si uno define las mismas relaciónes pero para filtos e ideales arbitrarios, entonces estas relaciónes son de equivalencia. Es decir, demuestre que las siguientes relaciónes son de equivalencia. Sea F un filto e I un ideal, definimos $x \sim_F y$ si y solo si existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$; y $x \sim_I y$ si y solo si existe $i \in I$ tal que $x \vee i = y \vee i$.*

Ejercicio 2.18 *Demuestre que efectivamente son equivalentes:*

1. $f(x) = f(y)$
2. $x \sim_{Nuc(f)} y$
3. $x \sim_{Sh(f)} y$

Ejercicio 2.19 *Sea $f : A \to B$ un morfismo. Demuestre que f es mono si y solo si $Nuc(f) = \{0\}$ (dualmente para el shell, f es mono si y solo si $Sh(f) = \{1\}$).*

Si ahora consideramos el conjunto cociente bajo esta relaciónes de equivalencia $A/\sim_{nuc(f)}$ podemos extender la función $f : A \to B$ a $\hat{f} : A/_{Nuc(f)} \to B$ como $\hat{f}([a]) = f(a)$, y además podemos observar que $\hat{f}$ es inyectiva, sin embargo $\hat{f}$ no es un morfismo de álgebras ya que $A/_{Nuc(f)}$ no tiene estructura de álgebra booleana. Pero esto se puede enmendar facilmente, pues la relación $\sim_{Nuc(f)}$ preserva la estructura de álgebra booleana, y por lo tanto podemos heredar esta estructura al cociente.

Proposición 2.20 *Las relaciónes definidas en el ejericicio 2.17 son relaciónes de congruencia. Es decir:*

1. *Si $x \sim_F y$ ($x \sim_I y$) entonces $\neg x \sim_F \neg y$ ($\neg x \sim_I \neg y$).*
2. *Si $x_1 \sim_F x_2$ y $y_1 \sim_F y_2$ ($x_1 \sim_I x_2$ y $y_1 \sim_I y_2$) entonces $x_1 \vee y_1 \sim_F x_2 \vee y_2$ ($x_1 \vee y_1 \sim_I x_2 \vee y_2$).*
3. *Si $x_1 \sim_F x_2$ y $y_1 \sim_F y_2$ ($x_1 \sim_I x_2$ y $y_1 \sim_I y_2$) entonces $x_1 \wedge y_1 \sim_F x_2 \vee y_2$ ($x_1 \wedge y_1 \sim_I x_2 \vee y_2$).*

Demostración Se demostrara solo para $\sim_F$, el otro caso es dual.

1. Sean $x, y \in A$ tales que $x \sim_F y$. Entonces existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$. Por lo tanto $\neg(x \wedge f) = \neg(y \wedge f)$. Usando las leyes de De Morgan (Ejercicio 2.7) obtenemos $\neg x \vee \neg f = \neg y \vee \neg f$. Por lo tanto $(\neg x \vee \neg f) \wedge f = (\neg y \vee \neg f) \wedge f$.

Desarrollando llegamos a que

$$\begin{aligned}\neg x \wedge f &= (\neg x \wedge f) \vee (\neg f \wedge f)\\ &= (\neg x \vee \neg f) \wedge f\\ &= (\neg y \vee \neg f) \wedge f\\ &= (\neg y \wedge f) \vee (\neg f \wedge f) = \neg y \wedge f\end{aligned}$$

Por lo tanto $\neg x \sim_F \neg y$.

2. Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ tales que $x_1 \sim_F x_2$ y $y_1 \sim_F y_2$. Entonces existen $f_1, f_2 \in F$ tales que $x_1 \wedge f_1 = x_2 \wedge f_1$ y $y_1 \wedge f_2 = y_2 \wedge f_2$. Entonces

$$\begin{aligned}(x_1 \vee y_1) \wedge (f_1 \wedge f_2) &= (x_1 \wedge (f_1 \wedge f_2)) \vee (y_1 \wedge (f_1 \wedge f_2))\\ &= ((x_1 \wedge f_1) \wedge f_2) \vee ((y_1 \wedge f_2) \wedge f_1)\\ &= ((x_2 \wedge f_1) \wedge f_2) \vee ((y_2 \wedge f_2) \wedge f_1)\\ &= (x_2 \vee y_2) \wedge (f_1 \wedge f_2)\end{aligned}$$

Como F es filtro $f_1 \wedge f_2 \in F$ por lo que $x_1 \vee y_1 \sim_F x_2 \vee y_2$.

3. Sean $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ como en el inciso anterior. Entonces

$$\begin{aligned}(x_1 \wedge y_1) \wedge (f_1 \wedge f_2) &= (x_1 \wedge f_1) \wedge (y_1 \wedge f_2)\\ &= (x_2 \wedge f_1) \wedge (y_2 \wedge f_2)\\ &= (x_2 \wedge y_2) \wedge (f_1 \wedge f_2)\end{aligned}$$

Por lo que $x_1 \wedge y_1 \sim_F x_2 \wedge y_2$. □

Si I es un ideal y F un flitro, es posible construir una álgebra booleana con las relaciónes inducidas por ellos. A estas álgebras se les llama álgebras cociente:

Definición Sea I un ideal. Al conjunto $A/I = \{[a]_{\sim_I} | a \in A\}$ (recordemos que $[a]_{\sim_I} = \{b \in A | b \sim_I a\}$ es la clase de equivalencia de a) se le llama A módulo I y se le puede proveer de una estructura de álgebra booleana con las siguientes operaciones:

1. $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$
2. $[a] \vee [b] = [a \vee b]$
3. $\neg [a] = [\neg a]$

Si F es un filtro entonces A/F es el álgebra booleana de las clases de equivalencia bajo la relación $\sim_F$ con las operaciones heredadas. Tanto A/I como A/F son álgebras booleanas gracias a la proposición 2.20.

Ejercicio 2.21 *Sea I un ideal y F un filtro en A. ¿Quien es el 0 y el 1 de A/I, y de A/F?*

Existen morfismos naturales de A en A/I y A/F llamados proyecciones $p_I : A \to A/I$, $p_F : A \to A/F$ y cumplen que $p(a) = [a]$ y de hecho:

Lema 2.22 *Sea I un ideal en A, y F un filtro. Entonces $Nuc(p_I) = I$ y $Sh(p_F) = F$.*

Demostración Demostrare solo el caso de los ideales. La demostración para los filtros es dual. Sea $a \in A$ tal que $p_I(a) = 0$. Entonces $[a] = [0]$ por lo tanto existe $i \in I$ tal que $a \vee i = i$. Esto nos dice que $a \leq i$ pero I es un ideal y por lo tanto $a \in I$. además para todo $i \in I$ $[i] = [0]$. Por lo tanto $Nuc(f) = I$. $\square$

En resumen:

Teorema 2.23 *Sea A una álgebra booleana. Existe una correspondencia biyectiva entre los ideales de A y el núcleo de los morfismos con dominio A. Dualmente, existe una correspondencia biyectiva entre los filtros de A y el "shell" de morfismos con dominio A. $\{I | I \text{ es ideal}\} \cong \{Nuc(f) | f : A \to B \text{ es morfismo}\}$ y $\{F | F \text{es filtro}\} \cong \{Sh(f) | f : A \to B \text{ es morfismo}\}$.*

Demostración $\square$

Las álgebras cociente se comportan de una manera bastante interesante como lo evidencía el siguiente teorema.

Teorema 2.24 *Sea I un ideal en A. Entonces A/I cumple la siguiente propiedad (universal): Si $f : A \to B$ es un morfismo tal que $I \subseteq Nuc(f)$ entonces existe un único morfismo $h : A/I \to B$ tal que $f = hp_I$. O en otras palabras, que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_I"'] & B \\
A/I \arrow[ur, dotted, "\exists! h"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración Sea I un ideal y $f : A \to B$ un morfismo tal que $I \subseteq Nuc(f)$. Definimos $h : A/I \to B$ como sigue: $h([a]) = f(a)$. Tenemos que verificar tres cosas, uno que la función h esta bien definida (es decir que su valor no depende del representante de la clase que tomemos), que h es un morfismo y que hace conmutar el diagrama. Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim_I b$, entonces existe $i \in I$ tal que $a \vee i = b \vee i$ por lo que

$$f(a) = f(a) \vee 0 = f(a) \vee f(i) = f(a \vee i) = f(b \vee i) = f(b) \vee f(i) = f(b) \vee 0 = f(b)$$

lo cual nos garantiza que h está bien definida. Que h sea un morfismo es consecuencia de que f es morfismo y de como indujimos las operaciones en A/I. Y es claro que $f = hp_I$. Sea $h' : A/I \to B$ un morfismo tal que $h'p_I = f$. Entonces $h([a]) = h(p_I(a)) = f(a) = h'(p_I(a)) = h'([a])$, por lo que $h' = h$. $\square$

Ejercicio 2.25 *Enuncie y demuestre el enunciado dual del teorema 2.24.*

Teorema 2.26 *Sea $f : A \to B$ un morfismo. Entonces $A/Nuc(f) \simeq Im(f)$.*

Demostración Sea $I = Nuc(f)$ por el teorema 2.24 existe un morfismo $h : A/I \to B$ tal que $f = hp_I$, veamos que h es un isomorfismo con la imagen. Por el ejercicio 2.18 y 2.19 h es un monomorfismo. Y es claro que $Im(h) = Im(f)$ por lo tanto es $h : A/I \to Im(h)$ es mono y epi, y por lo tanto iso. Esto es $A/I \simeq Im(f)$. $\square$

Corolario 2.27 *Sea $f : A \to B$ un epimorfismo. Entonces $A/Nuc(f) \simeq B$*

Ejercicio 2.28 *Demuestre el dual de los teoremas 2.26 y 2.27.*

Ejercicio 2.29 *Sea X un conjunto no vacío y $Y \subset X$. Sea $I = Y \downarrow = \{Z \subset X | Z \subset Y\}$, demuestre que $\wp(X)/I \simeq \wp(Y)$.*

Los teoremas 2.23, 2.24, 2.25 nos han revelado la importancia de los filtros y los ideales. Estas son las subestructuras de una álgebra booleana que nos dicen que tanto difieren de otras álgebras booleanas y tambien a que álgebras booleanas se parece. En lo que sigue nos dedicaremos a estudiar los filtros.

2.3 Filtros

En esta sección, supondremos que estamos trabajando en una álgebra booleana A. Nombraremos Fil(A) al conjunto de filtros de A.

Los filtros, junto con la inclusión forman un orden parcial. ¿Qué propiedades tiene este orden parcial?

Teorema 2.30 $(Fil(A), \subseteq)$ *es una orden parcial donde todo subconjunto tiene ínfimo y supremos, y además tiene máximo y mínimo.*

Antes de dar la demostración del teorema observemos que la intersección de cualquier cantidad de filtros es un filtro:

Ejercicio 2.31 *Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de filtros. Entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un filtro.*

La unión de dos filtros puede no ser un filtro. Por ejemplo:

$$\begin{tikzcd}
 & \{x,y\} & \\
\{x\} \arrow[ur] & & \{y\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{x,y\} & \\
\{x\} \arrow[ur] & & \{y\} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

La figura de la izquierda es la unión de de los filtros $\{\{x\}, \{x,y\}\}$ y $\{\{y\}, \{x,y\}\}$ mas no es un filtro, pues $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ no está.

Sin embargo si existe el supremo de una familia de filtros, y de hecho existen dos maneras de construirlos. Para resolver esta duda nos planteamos una pregunta un poco mas general: ¿Dado un subconjunto $X \subseteq A$ cual es el filtro más chico que contiene a X?

La respuesta más inmediata esta contenida en el ejercicio 2.31. Sea X un subconjunto de A. Consideremos $< X >= \bigcap\{F \subseteq A | F$ es filtro y $X \subseteq F\}$. $< X >$ es un filtro que contiene a X y de hecho es el mas chico con esta propiedad, y por ello se le llama el filtro generado por X. Sin embargo a veces nos gustaría dar una caracterización mas explícita de quien es $< X >$. Todo filtro debe tener ínfimos finitos (puesto que tiene ínfimos por pares) por lo que lo menos que podemos exigir de un conjunto para que sea filtro es que contenga todos los ínfimos de sus subconjuntos finitos.

Sea X un subconjunto de A, denotamos por X^c al siguiente conjunto: $X^c = \{Inf(Y) | Y \in \wp_\omega(X)\}$, donde $\wp_\omega = \{Y \subseteq X | Y$ es finito $\}$.

La tercera condición para que un conjunto sea un filtro dice que debe de contener todos los elementos que sean más grande que algún elemento del conjunto. Sea $X \uparrow = \{a \in A |$ existe $b \in X$ tal que $b \leq a\}$.

Ejercicio 2.32 *Demuestre que para todo $X \subseteq A$, $X \subseteq X^c$ y $X \subseteq X \uparrow$.*

Proposición 2.33 *Sea $X \subseteq A$ no vacío. $(X^c) \uparrow$ es el filtro más chico que contiene a X. Por lo tanto $(X^c) \uparrow = < X >$.*

Demostración Por el ejercicio anterior $X \subseteq (X^c) \uparrow$. Como X es no vacío entonces existe $y \in X^c$. $y \leq 1$ por lo que $1 \in (X^c) \uparrow$. Sean $x, y \in (X^c) \uparrow$, entonces existen $Y_1, Y_2 \in \wp_\omega(X)$ tales que $Inf(Y_1) \leq x$ y $Inf(Y_2) \leq y$, por lo tanto $Inf(Y_1 \cup Y_2) \leq x \wedge y$; $x \wedge y \in (X^c) \uparrow$. Sea $x \in (X^c) \uparrow$ y $x \leq z$. Entonces existe $Y \in \wp_\omega(X)$ tal que $Inf(Y) \leq x \leq z$, por lo tanto $z \in (X^c) \uparrow$.

Sea F un filtro que contiene a X. Sea $y \in (X^c) \uparrow$ entonces existe $Y \in \wp_\omega(X)$ tal que $Inf(Y) \leq y$. Como F es filtro y contiene a X, $Inf(Y) \in F$ y por lo tanto $y \in F$. Es decir $(X^c) \uparrow \subseteq F$. □

Con esto hemos demostrado el teorema 2.30

Definición Se dice que un filtro F es propio si $F \neq A$.

Note que F es un filtro propio si y solo si $0 \notin F$ (Ejercicio).

¿Cuando ocurre que $< X >$ es propio? Si X tiene un subconjunto cuyo ínfimo es 0 entonces $0 \in X^c$ y por lo tanto $A \subseteq (X^c) \uparrow$. Ahora supongamos que $< X >= A$. Entonces $0 \in < X >= (X^c) \uparrow$ por lo que existe $Y \in \wp_\omega(X)$ tal que $Inf(Y) \leq 0$. Esto es X tiene un subconjunto finito cuyo ínfimo es 0.

Definición Se dice que X tiene la propiedad de intersección finita (pif) si el ínfimo de todo subconjunto finito de X no es 0. Si para todo $Y \in \wp_\omega(X)$ $Inf(Y) \neq 0$.

Proposición 2.34 *Sea $X \subseteq A$ entonces $< X >$ es propio si y solo si X tiene la pif.*

Demostración □

Como Fil(X) es una retícula, nos podemos preguntar quienes son los elementos maximales de la retícula, es decir, los filtros propios que no estan contenidos en otros filtros propios. A estos filtros los llamamos ultrafiltros.

Definición Un filtro F es un ultrafiltro si F es propio y si para todo filtro propio G, si $F \subseteq G$ entonces $F = G$.

El siguiente teorema demuestra la importancia de los ultrafiltros, sobre todo para nuestros propositos lógicos.

Teorema 2.35 *Sea F un filtro en A. Son equivalentes:*

1. *F es un ultrafiltro.*
2. *$A/F \simeq \mathbf{2}$.*
3. *Si $x \vee y \in F$ entonces $x \in F$ o $y \in F$. (El filtro es primo)*
4. *Para todo $x \in A$, $x \in F$ o $\neg x \in F$.*

Demostración (1 $\Longrightarrow$ 3) Sea $x, y \in A$ tales que $x \vee y \in A$. Supongamos que $y, x \notin F$ entonces $< F \cup \{x\} >= A =< F \cup \{y\} >$ ya que F es un ultrafiltro. Por lo tanto existen $Y_1 \in \wp_\omega(F \cup \{x\})$ y $Y_2 \in \wp_\omega(F \cup \{y\})$ tales que $Inf(Y_1) = 0 = Inf(Y_2)$. Como F es un filtro propio entonces tiene la pif, por lo que $Y_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n, x\}$ y $Y_2 = \{b_1, b_2, ..., b_m, y\}$. Entonces $Inf(Y_1) = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n \wedge x = 0 = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_m \wedge y = Inf(Y_2)$. Como F es filtro $a_1 \wedge ... \wedge a_n \in F$ y $b_1 \wedge ... \wedge b_n \in F$, entonces lo que tenemos es que existen $a, b \in F$ tales que $a \wedge x = 0 = b \wedge y$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 = (a \wedge x) \vee (b \wedge y) &= (a \vee (b \wedge y)) \wedge (x \vee (b \wedge y)) \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y) \end{aligned}$$

Pero observemos que cada uno de los términos $(a \vee b), (a \vee y), (x \vee b), (x \vee y) \in F$ por lo que $0 \in F$. Esta contradicción nos lleva a concluir que $x \in F$ o $y \in F$.

(3 $\Longrightarrow$ 4) Sea $x \in A$ entonces $x \vee \neg x = 1 \in F$. Como F es primo entonces $x \in F$ o $\neg x \in F$

(4 $\Longrightarrow$ 1) Sea G un filtro tal que $F \subseteq G$. Supongamos que $F \neq G$. Entonces existe $y \in G \setminus F$. Como $y \notin F$ entonces $\neg y \in F \subseteq G$. Como G es filtro $0 = y \wedge \neg y \in G$ y por lo tanto $G = A$.

(3 $\Longrightarrow$ 2) Definamos $h : A \to \mathbf{2}$ como sigue: $h(a) = 1$ si $a \in F$ y $h(a) = 0$ si no. Se puede verificar que h es un morfismo (ejercicio). Como Sh(f)=F, y h es claramente un epimorfismo entonces $\mathbf{2} \simeq A/F$. (Corolario 2.27)

(2 $\Longrightarrow$ 3) Sean $x, y \in A$ tales que $x \vee y \in F$. Consideremos la proyección $p_F : A \to A/F \simeq \mathbf{2}$. $p_F(x) \vee p_F(y) = p_F(x \vee y) = 1$. Pero como $A/F \simeq \mathbf{2}$ no se puede tener que $p_F(x) = 0 = p_F(y)$ y por lo tanto $p_F(y) = 1$ o $p_F(x) = 1$. Esto se traduce en $x \in F$ o $y \in F$. $\square$

Ahora supongamos que tenemos un filtro. Nos gustaría poder extenderlo si es posible a un ultrafiltro. Siempre que tengamos un filtro podemos extenderlo para contener un elemento o la negacion de ese elemento. Sin embargo el paso que se tiene que tomar para extender un filtro a un ultrafiltro requerirá del axioma de elección. Pero por ahora:

Proposición 2.36 *Sea F un filtro propio A y $x \in A$ entonces $F \cup \{x\}$ o $F \cup \{\neg x\}$ tiene la pif.*

Demostración Supongamos que $x \notin F$ y que ni $F \cup \{x\}$ ni $F \cup \{\neg x\}$ tienen la pif. Entonces existen $Y_1 \in \wp_\omega(F \cup \{x\})$ y $Y_2 \in \wp_\omega(F \cup \{\neg x\})$ tales que $Inf(Y_1) = 0 = Inf(Y_2)$. Como X tiene la pif $x \in Y_1$ y $\neg x \in Y_2$. Entonces $(a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n) \wedge x = 0 = (b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_m) \wedge \neg x$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
0 &= ((a_1 \wedge ... \wedge a_n) \wedge x) \vee ((b_1 \wedge ... \wedge b_n) \wedge \neg x) \\
&= ((a_1 \wedge ... \wedge a_n) \vee (b_1 \wedge ... \wedge b_n)) \wedge ((a_1 \wedge ... \wedge a_n) \vee \neg x) \wedge ((b_1 \wedge ... \wedge b_m) \vee x) \wedge (x \vee \neg x) \\
&= ((a_1 \wedge ... \wedge a_n) \vee (b_1 \wedge ... \wedge b_n)) \wedge ((a_1 \wedge ... \wedge a_n) \vee \neg x) \wedge ((b_1 \wedge ... \wedge b_m) \vee x)
\end{aligned}$$

Entonces $0 \in F$, contradicción. Entonces $F \cup \{x\}$ o $F \cup \{\neg x\}$ tiene la pif. □

Ejercicio 2.37 *Demuestre que si X es un conjunto que tiene la pif, y x un elemento de A entonces $X \cup \{x\}$ o $X \cup \{\neg x\}$ tiene la pif.*

Teorema 2.38 (Teorema del Ultrafiltro (AE)) *Todo filtro propio esta contenido en algún ultrafiltro.*

Demostración Usaremos el axioma de elección en la forma del lema de Zorn. Sea F un filtro propio. Consideremos $H = \{K | K$ es filtro propio y $F \subseteq K\}$. H es no vacío ya que $F \in H$.

Sea C una cadena en H. Afirmo que $\bigcup C \in H$. Esto es que $\bigcup C$ es un filtro propio que contiene a F. Pero $1 \in \bigcup C$ ya que C contiene al menos un filtro y todo filtro contiene al 1. Sean $x, y \in \bigcup C$ entonces $x \in F_1$ y $y \in F_2$ donde $F_1, F_2 \in C$. Como C es una cadena, podemos suponer sin perdida de generalidad que $F_1 \subseteq F_2$ por lo que $x, y \in F_2$. Como F_2 es un filtro $x \wedge y \in F_2 \subseteq \bigcup C$. Sea $x \in \bigcup C$ y $x \leq z$, entonces $x \in F_1 \in C$. Como F_1 es filtro $z \in F_1 \subseteq \bigcup C$, con lo cual concluimos que $\bigcup C$ es un filtro. Además es propio ya que si $0 \in \bigcup C$ entonces $0 \in F \in C \subseteq H$ lo cual es imposible.

Por lo tanto H es un orden parcial no vacío en donde toda cadena está acotada superiormente. Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal U en H. Pero U es un ultrafiltro pues si K es un filtro tal que $U \subseteq K$, como $F \subseteq U \subseteq K$ entonces K es A o K es propio y por lo tanto $K \in H$, lo cual implica por la maximalidad de U que $K = U$. □

Ejercicio 2.39 *Si X es un subconjunto no vacío de A que tiene la pif, entonces X esta contenido en un ultrafiltro.*

Ejercicio 2.40 *En una álgebra booleana A se cumple que:*

$$x \wedge \neg y = 0 \iff x \leq y$$

Corolario 2.41 *Sean $x, y \in A$ tales que $x \nleq y$, entonces existe un ultrafiltro U tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*

Demostración Consideremos el conjunto $X = \{x, \neg y\}$. Por el ejercicio 2.40 X tiene la pif y por lo tanto (en virtud del ejercicio 2.39) existe un ultrafiltro U tal que $\{x, \neg y\} \subseteq U$. La presencia de $\neg y$ en U impide que $y \in U$ ya que conllevaria a que U no sea propio $(0 = y \wedge \neg y \in U)$. En resumen U es un ultrafiltro tal que $x \in U$ y $y \notin U$. $\square$

Este ultimo corolario es bastante importante, ya que nos dice que es posible separar los puntos de A con ultrafiltros, y como consecuencia de este hecho tenemos que podemos recuperar gran parte de la información del álgebra booleana a partir de su estructura de filtros. Un ejemplo notable de esto es el teorema de representación de Stone, que aunque no sea relevante en lo que sigue, será demostrado aquí.

Teorema 2.42 (de representación de Stone (AE)) *Sea A una álgebra booleana, entonces existe un conjunto X y un monomorfismo $\phi : A \to \wp(X)$. $(A \simeq \phi(A))$*

Demostración Consideremos $X = \{U \subseteq A | U \text{ es ultrafiltro}\}$. Definimos $\phi : A \to \wp(X)$ como $\phi(a) = \{U \in X | a \in U\}$

ϕ es un morfismo:

$(\phi(a \wedge b) = \phi(a) \cap \phi(b))$: Sean $a, b \in A$ y $U \in \phi(a \wedge b)$, entonces $a \wedge b \in U$. Como U es filtro y $a \wedge b \leq a, b$ entonces $a, b \in U$, por lo que $U \in \phi(a) \cap \phi(b)$. Sea $U \in \phi(a) \cap \phi(b)$ entonces, $a, b \in U$ por lo que $a \wedge b \in U$. Por lo tanto $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \cap \phi(b)$.

$(\phi(a \vee b) = \phi(a) \cup \phi(b))$: Sean $a, b \in A$ y $U \in \phi(a \vee b)$, entonces $a \vee b \in U$. Por el teorema 2.35 $a \in U$ o $b \in U$, lo cual implica que $U \in \phi(a) \cup \phi(b)$. Sea $U \in \phi(a) \cup \phi(b)$ entonces $a \in U$ o $b \in U$. En ambos casos como $a, b \leq a \vee b$ se tendria que $a \vee b \in U$ por lo que $U \in \phi(a \vee b)$. Por lo tanto $\phi(a \vee b) = \phi(a) \cup \phi(b)$.

$(\phi(\neg a) = X \setminus \phi(a))$: Sea $a \in A$ y $U \in \phi(\neg a)$. Entonces $\neg a \in U$, y como U es propio entonces $a \notin U$, esto es $U \notin \phi(a)$. Sea $U \in X \setminus \phi(a)$ entonces $a \notin U$. De nuevo por el teorema 2.25, esto implica que $\neg a \in U$ y por lo tanto $\phi(\neg a) = X \setminus \phi(a)$.

ϕ es mono: Por el corolario 2.41 si $x \neq y$ entonces $x \nleq y$ o $y \nleq x$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x \nleq y$, por lo tanto existe un ultrafiltro tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Esto es $\phi(x) \neq \phi(y)$. $\square$

3 Lógica