LÓGICAS NO CLÁSICAS

LÓGICA MATEMÁTICA II

Contents

1. Introducción.

Los escritos de Arisotóteles, compilados en el *Órganon*, que contenían sus estudios acerca de la Lógica establecieron un canon para el razonamiento estructurado que ha perdurado hasta nuestra era. Con la ayuda de los filósofos racionalistas (Descartes, Leibniz) del siglo XVII, la lógica aristotélica se transformó en la plataforma de la ciencia que habría de desarrollarse posteriormente. Este legado a la cultura occidental fue tan profundo que es llamada lógica clásica.

Antes que rendir cuentas a la lógica aristotélica repasemos los antecedentes a su creación para comprender su estructura intrínseca. Como racionalista, Aristóteles se empeño en construir una teoría de la clasificación y la definición con el fin de eliminar las ambiguedades del lenguaje y darle mayor precisión a los argumentos filosóficos. Su clasificación suponía que el mundo de los objetos (para él el único mundo) podía ser organizado a través de dos relaciones: género y especie. Consideraba una versión del axioma de especificación: una propiedad puede ser vista como el conjunto de objetos que la satisfacen. El conjunto de los objetos con la propiedad "x" habría de llamarse género, y cualquier elemento una especie. El agua es una especie del género fluido. Es importante notar que especies pueden ser a su vez géneros, como el triángulo, que es una especie del género polígono y un género para los triángulos rectángulos. El problema de definir un objeto se reduce a encontrar una clase finita de géneros tales que lo tengan como único elemento en común.

La lógica aristotélica es por tanto una lógica de clases, tratando las relaciones que existen entre subconjuntos de un conjunto universal de objetos. Dado que cualquier álgebra booleana se encaja naturalemente en la potencia de un conjunto, no es de sorprender que Boole diera en 1847 con una algebrización booleana de la lógica. Esto ultimo es una realización matemática del ideal aristotélico.

La relevancia de está observación es la siguiente: la lógica clásica no es producto de una organización metafisica del mundo (como lo había pensado Aristóteles) sino la consecuencia de un modo de pensamiento. Esto nos sugiere que otros modos de pensamiento podrían conllevar lógicas diferentes. Así surgen las lógicas no-clásicas.

2. Lógica Intuicionista.

2.1. **Introducción.** El quehacer matemático del siglo XIX observó un rápido crecimiento del método abstracto. La introducción de la teoría de conjuntos de Cantor, las geometrías no euclidianas, el inicio del álgebra abstracta, son factores que desencadenaron el esceptisismo de un grupo de matemáticos. Este grupo[1] fue conformado por matemáticos destacados como: Poincare, Kroeneker, Borel y sobre todo L.E.J. Brouwer. Abogaban por el constructivismo: una corriente filosófica cuya idea básica es que la existencia de los objetos matemáticos solo puede ser asegurada a través de su construcción. Una consecuencia de está postura es el rechazo de la demostración por reducción al absurdo, a saber no es válido demostrar un existencial $\exists x\phi(x)$ obteniendo una contradicción de $\forall x\neg\phi(x)$. Brouwer, el integrante más radical del grupo, consagró varios textos al fin de establecer el constructivismo como una posibilidad real dentro de las matemáticas y en los cuales estableció los fundamentos para una lógica adecuada a sus ideas filosóficas llamada: lógica intuicionista.

Heyting, pupilo de Brouwer, formalizó el intuicionismo dando una interpretación al lenguaje que capta la esencia de la lógica broweriana y cristalizando sus reglas en las relaciones que definen un álgebra de Heyting (análogo a las álgebras booleanas). La interpretación es llamada BHK (por Brouwer, Heyting y Kolmogorov) y consiste en pensar una fórmula como si fuera el testigo de la demostración de ella misma. Esto es, pensamos al símbolo ϕ como una prueba de que la propiedad enunciada por ϕ es verdad. Así la interpretación BHK está basada en la noción de prueba y no en la de verdad (hay que notar que no estamos tratando con pruebas formales, sino con una noción intuitiva de argumento convincente; de la misma manera Aristóteles no estaba pensando en los conjuntos de una teoría axiomática formal, como ZFC, sino en una noción intuitiva de clase). La demostrabilidad de las fórmulas compuestas está determinada por la demostrabilidad de sus partes y los conectivos lógicos que contiene:

[1]Usamos grupo aquí para coleccionar varias personas con ideales filosóficos parecidos, no para decir que se reconocian como tal.

2.2. **Interpretación BHK.**

(1) Una prueba de $\phi \wedge \psi$[2] consiste de una prueba de ϕ y una prueba de ψ más la conclusión $\phi \wedge \psi$.
(2) Una prueba de $\phi \vee \psi$ consiste en una prueba de ϕ o una prueba de ψ más la conclusión $\phi \vee \psi$.
(3) Una prueba de $\phi \rightarrow \psi$ consiste de un método para convertir cualquier prueba de ϕ en una prueba de ψ.
(4) Una prueba de $\exists x \phi(x)$ consiste en un objeto de nombre c construido en el dominio del discurso más una prueba de que $\phi(d)$ y la conclusión $\exists x \phi(x)$.
(5) Una prueba de $\forall x \phi(x)$ consiste de un método que de cada objeto c construido en el dominio del discurso produce una prueba de $\phi(d)$.

Observen que una prueba de $\neg\phi$ es una forma de convertir cualquier prueba de ϕ en una contradicción ($\perp$). Demos un ejemplo: la fórmula $(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)$ es verdad en el sentido intuicionista, i.e. es demostrable. Segun la interpretación BHK una demostración de la fórmula sería un método para convertir una prueba de $(\psi \rightarrow \phi)$ en una prueba de $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi)$, así que supongamos que tenemos una prueba de $(\psi \rightarrow \phi)$. Para dar una prueba de $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi)$ hemos de mostrar que dada una prueba de $\neg\phi$ podemos derivar una prueba de $\neg\psi$, por lo que tambien debemos de suponer $\neg\phi$. Por ultimo para demostrar $\neg\psi$ suponemos una prueba de ψ y debemos de llegar a una contradicción. Sin embargo nuestras suposiciones incluyen una prueba de $(\psi \rightarrow \phi)$ que es es un método para derivar una prueba de ϕ partiendo de una prueba de ψ, por lo que podemos transformar nuestra supuesta prueba de ψ en una de ϕ. La otra suposición $(\neg\phi)$ nos da una manera de convertir una prueba de ϕ en una contradicción, por lo que al insertar nuestra pueba de ϕ obtenemos la contradicción deseada.

Es posible extraer ciertas reglas de inferencia que son válidas bajo está interpretación:

I$\wedge$: De ϕ y ψ se puede concluir $\phi \wedge \psi$.
E$\wedge$: De $\phi \wedge \psi$ se puede concluir ϕ y ψ.
I$\rightarrow$: De ϕ y $\phi \rightarrow \psi$ se puede concluir ψ.
E$\rightarrow$: Si se puede derivar ψ de la premisa ϕ entonces se puede concluir $\phi \rightarrow \psi$.
I$\vee$: De ϕ o ψ se puede concluir $\phi \vee \psi$.
E $\vee$: Si se puede derivar χ de la premisa ϕ y tambien de la premisa ψ, entonces se puede concluir χ de la premisa $\phi \vee \psi$.
I$\forall$: Si se obtiene una derivación de $\phi(x)$ donde x no aparece libre en ninguna de las premisas entonces se puede concluir $\forall x \phi(x)$.
E$\forall$: Si uno tiene una derivación de $\forall x \phi(x)$ entonces es posible concluir $\phi(t)$ para cualquier término t.
I$\exists$: De $\phi(t)$ para cualquier término t se puede concluir $\exists x \phi(x)$.
E$\exists$: Si se obtiene una derivación de ψ a partir de $\phi(x)$, y x no es libre en ψ o en cualquier otra premisa aparte de $\phi(x)$, entonces uno puede concluir ψ de la premisa $\exists x \phi(x)$.

De este sistema natural de deducción (ver Gentzen [10]) podemos comenzar a derivar ciertas verdades intuicionistas, y distinguir aquellas proposiciones clásicas que ya no se satisfacen. Como ejemplos arquetípicos de fórmulas que no se cumplen tenemos:

[2]Para detalles acerca del lenguaje utilizado vease la sección 2.3.

- $\phi \vee \neg\phi$
- $\neg(\phi \wedge \psi) \to \neg\phi \vee \neg\psi$
- $(\phi \to \psi) \to \neg\phi \vee \psi$
- $(\phi \to \psi \vee \chi) \to (\phi \to \psi) \vee (\phi \to \chi)$
- $\neg\neg\phi \to \phi$
- $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$
- $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$

Un buen ejercicio para el lector es pensar por qué las implicaciones en la otra dirección si son válidas.

2.3. **Sistema Formal de la Lógica Intuicionista (IPC).** El sistema natural de deducción antes mencionado puede ser formalizado en un sistema axiomático llamado IPC. El lenguaje del cálculo de proposiciones de la lógica intuicionista es muy parecido al de la lógica clásica: se conservan los conectivos $\wedge, \vee, \to$ y las letras proposicionales $\{P_i | i \in \mathbb{N}\}$, además se introduce un nuevo símbolo $\perp$ que se utiliza para definir la negación: $\neg\phi := \phi \to \perp$. El símbolo $\perp$ será interpretado como un absurdo. Las fórmulas se construyen siguiendo el método recursivo usual con la única diferencia que como fórmula atómica tambien se acepta $\perp$ (i.e. juega el papel de una letra proposicional). La única regla de inferencia válida será Modus Ponens.

2.3.1. *Axiomas para IPC.*

(1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
(2) $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$
(3) $\phi \wedge \psi \to \phi$
(4) $\phi \wedge \psi \to \psi$
(5) $\phi \to \phi \vee \psi$
(6) $\psi \to \phi \vee \psi$
(7) $(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi))$
(8) $\perp \to \phi$

Este cálculo de proposiciones difiere muy poco del cálculo clásico en donde el siguiente esquema de axioma era válido:

- $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$

De donde era posible demostrar por reducción al absurdo. Sin embargo muchas de las capacidades del sistema clásico siguen vigentes como:

Teorema 2.1 (Metateorema de la Deducción)**.** *Sean* $\{\phi\,\psi\}, \Gamma \subset FRM_{IPC}$*. Entonces* $\phi; \Gamma \vdash_{IPC} \psi$ *si y solo si* $\Gamma \vdash_{IPC} \phi \to \psi$*.*

Proposición 2.2. *Sea* $\phi \in FRM_{IPC}$*. Entonces* $\vdash_{IPC} \phi \to \phi$*.*

Proposición 2.3. *Son teoremas de IPC:*

(1) $(\phi \to \psi \wedge \chi) \leftrightarrow ((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi))$
(2) $(\phi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \to \chi)$
(3) $(\phi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \to \chi)$
(4) $((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \to \psi$
(5) $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$
(6) $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$
(7) $\phi \to \neg\neg\phi$

Más interesante que jugar con la maquinaria de demostración de la lógica intuicionista es darle una interpretación correcta.

2.4. **Semántica de la lógica Intuicionista.** El universo constructivista de la lógica intuicionista nos sugiere la imagen de un mundo que evoluciona de manera positiva. Un mundo en el cual las verdades se van asegurando poco a poco; en donde una prueba no puede ser negada. Imaginamos la mente un matemático ideal cuya única actividad es buscar la verdad con un solo método: la demostración constructiva. ¿Cuales son los caminos que puede tomar?

Formalizamos está idea en lo que se llama un marco de Kripke para la lógica intuicionista:

Definición Un marco de Kripke es una pareja ordenada (M, R) donde M es un conjunto no vacío y R es una relación binaria reflexiva, transitiva y antisimétrica sobre M, es decir R es un orden parcial sobre M.

Los elementos de M son llamados mundos, la relación R es llamada la relación de accesibilidad. Interpretamos nuestro lenguaje sobre este tipo de estructuras dando valores de verdad a las letras proposicionales en cada uno de los mundos de un marco de Kripke con la única restricción de que la verdad se preserve en los mundos accesibles.

Definición Sea (M, R) un marco de Kripke. Una (M, R)-Asignación es una función $V : \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{\bot\} \times M \to \{0, 1\}$ monótona[3] tal que $V(\bot, w) = 0$ para todo $w \in M$. Un marco de Kripke junto con una (M, R)-asignación recibe el nombre de modelo de Kripke (M, R, V).

La verdad de un enunciado del lenguaje formal en un mundo de un modelo de Kripe se define de manera recursiva:

Satisfacibilidad Intuicionista Sea (M, R, V) un modelo de Kripke. Se dice que un mundo w de (M, R, V) satisface una fórmula ϕ $(w \Vdash \phi)$[4] si y solo si:

- $\phi = P_i$ y $V(P_i, w) = 1$.
- $\phi = \psi \wedge \chi$ y $w \Vdash \psi$ y $w \Vdash \chi$.
- $\phi = \psi \vee \chi$ y $w \Vdash \psi$ ó $w \Vdash \chi$.
- $\phi = \psi \to \chi$ y para todo w' tal que wRw' se cumple que $w' \Vdash \psi$ implica $w' \Vdash \chi$.

Notemos que $\bot$ no es satisfecho en ningun mundo y por lo tanto la satisfacibilidad de la negación queda definida de la siguiente manera:

$w \Vdash \neg\alpha$ si y solo si para todo w' tal que wRw' si $w' \Vdash \alpha$ entonces $w' \Vdash \bot$ si y solo si para todo w' tal que wRw' $w' \nVdash \alpha$.

La "satisfacibilidad" sobre las letras proposicionales es monótona segun nuestra definición, sin embargo está propiedad se hereda a todas las fórmulas.

Proposición 2.4. *Sea (M,R,V) un modelo de Kripke y $\phi \in FRM_{LI}$. Si $w \Vdash \phi$ y w' es tal que wRw' entonces $w' \Vdash \phi$.*

Proof. Por inducción sobre la formación de fórmulas. □

Definición Sea (M, R, V) un modelo de Kripke. Se dice que el modelo satisface una fórmula ϕ, denotado por $(M, R, V) \Vdash \phi$, si $w \Vdash \phi$ para toda $w \in M$.

---

[3]Es decir, si wRw' entonces $V(P_i, w) \leq V(P_i, w')$

[4]Una notación más adecuada deberia de contener la información (M,R,V) ya que la satisfacibilidad depende del modelo en el cual se este hablando, sin embargo aquí se omite para mantener una notación más compacta. Así siempre que se escribe $w \Vdash \phi$ se supone que un modelo de krikpe está dado.

Definición Sea (M,R) un marco de Kripke. Se dice que el marco satisface una fórmula ϕ, denotado por $(M,R) \Vdash \phi$, si para toda (M,R)-asignación V $(M,R,V) \Vdash \phi$.

Definición Sea $\Gamma \subset FRM_{LI}$ y (M,R,V) un modelo de Kripke. Se dice que (M,R,V) es un modelo de Γ si $(M,R,V) \Vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

La investigación nos ha llevado al establecimiento de una interpretación canónica del lenguaje y con ello ha inducido una estructura lógica (intuicionista) en las fórmulas. Definimos la relación fundamental de la lógica intuicionista:

Definición Sean $\{\phi\} \cup \Gamma \subset FRM_{LI}$. Se dice que ϕ es una consecuencia lógica (intuicionista) de Γ ($\Gamma \vDash_{LI} \phi$) si todo modelo de Γ es modelo de $\{\phi\}$.

Definición Una fórmula ϕ es universalmente válida ($\vDash_{LI} \phi$) si es una consecuencia lógica del vacío.

Si hemos logrado capturar el razonamiento constructivo con esta semántica, entonces la relación de consecuencia lógica nos da la información de las deducciones válidas. Para este fin nos basta con estudiar las fórmulas universalmente válidas. Sea $UV_{LI} = \{\phi \in FRM_{LI} | \vDash_{LI} \phi\}$.

El sistema axiomático antes mencionado nos basta para computar el conjunto UV_{LI}, es decir:

Teorema 2.5 (Completud y Correctud)**.** *El sistema axiomático IPC es correcto y completo con respecto a la propiedad de ser universalmente válida. Esto es $\vdash_{IPC} \phi$ si y solo si $\vDash_{LI} \phi$.*

Para consultar la demostración vease [23]

Corolario 2.6. *En la lógica intuicionista los siguientes esquemas no son demostrables:*

- $\phi \vee \neg\phi$
- $\neg\phi \vee \neg\neg\phi$

Proof. Consideremos los siguientes modelos de Kripke (M_1,R_1,V_1) y (M_2,R_2,V_2):

$$\begin{tikzcd}
M_1 & & M_2 & \\
w_1 P & w_1 P & & w_2 \\
w_2 \arrow[u] & & w_3 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En donde la P se escribe a lado de un mundo w si y solo si $V_i(P,w) = 1$. Vemos que en M_1 $w_2 \nVdash P$ y tambien $w_2 \nVdash \neg P$ por la observación previa sobre la negación. En M_2 $w_3 \nvDash \neg P$ pero como los únicos mundos con los cuales w_1 y w_2 están relacionados son ellos mismos, entonces se cumple que $w_2 \vDash \neg P$ por lo que $w_1 \nVdash \neg\neg P$. En resumen $(M_1,R_1,V_1) \nVdash P \vee \neg P$ y $(M_2,R_2,V_2) \nVdash \neg P \vee \neg\neg P$. Como consecuencia $\nvDash_{LI} \neg P \vee \neg\neg P$ y $\nvDash_{LI} P \vee \neg P$. □

Los modelos de Kripke pueden ser complejos, sin embargo hay un teorema que reduce el rango de modelos de Kripke en los que tenemos que trabajar.

Teorema 2.7. *Sea $\phi \in FRM_{LI}$. $\vDash_{LI} \phi$ si y solo si $(M,R) \Vdash \phi$ para todo (M,R) finito.*

De hecho si una fórmula es satisfacible entonces lo es en un modelo finito en donde el tamao del modelo esta en función a la cantidad de letras proposicionales y conectivos modales que ocurren en ella. Todo esto nos recuerda el método finito para revisar la validez de una fórmula de la lógica proposicional clásica llamado tablas de verdad. Sin embargo la complejidad del problema sigue siendo bastante grande. En términos computacionales: un algoritmo que pueda resolver si una fórmula es válida o no requiere una cantidad impresionante de memoria física como lo dice el siguiente teorema. Para una definición breve del concepto de complejidad computacional y la clase PSPACE vease [22].

Teorema 2.8. *El lenguaje UV_{LI} es PSPACE-completo.*

2.5. **La lógica clásica en la lógica Intuicionista.** La lógica intuicionista es un debilitamiento de la lógica clásica si se observa que todo teorema demostrado en la lógica intuicionista es demostrado por la lógica clásica. Sin embargo este debilitamiento tiene como consecuencia mayor libertad (este punto quedará claro cuando hablemos de álgebras de Heyting). El aumento de espacio provoca que la lógica intuicionista se comporte como una extension de la lógica clásica. El hecho que indica esto es la validez de las fórmulas en IPC:

Proposición 2.9. *Son demostrables:*
- $\neg\phi \leftrightarrow \neg\neg\neg\phi$
- $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$
- $\neg\neg(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi)$

Proof. La demostración será semántica. Usaremos el teorema de correctud completud para concluir el enunciado de la proposición. Sea (M, R, V) un modelo de Kripke.

Sea $w \in M$ veamos que $w \Vdash \neg\phi \leftrightarrow \neg\neg\neg\phi$. Desenrollemos las definiciones primero.

$w \Vdash \neg\phi \to \neg\neg\neg\phi$ si y solo si para todo $w' \in M$ tal que wRw' se satisface que si $w' \Vdash \neg\phi$ entonces $w' \Vdash \neg\neg\neg\phi$.

$w \Vdash \neg\phi$ si y solo si para todo $w' \in M$ tal que wRw' se tiene que $w' \nVdash \phi$.

$w \Vdash \neg\neg\phi$ si y solo si para todo $w' \in M$ tal que wRw' se tiene que $w' \nVdash \neg\phi$ si y solo si para todo $w' \in M$ tal que wRw' NO es cierto que para todo w'' con $w'Rw''$ se cumple que $w'' \nVdash \phi$ si y solo si para todo $w' \in M$ con wRw' existe un $w'' \in M$ con $w'Rw''$ y tal que $w'' \Vdash \phi$.

$w \Vdash \neg\neg\neg\phi$ si y solo si para todo $w_1 \in M$ con wRw_1 $w_1 \nVdash \neg\neg\phi$. Por la definición de $w_1 \Vdash \neg\neg\phi$ esto es equivalente a: para todo $w_1 \in M$ tal que wRw_1 existe un $w_2 \in M$ con w_1Rw_2 tal que para todo $w_3 \in M$ w_2Rw_3 se cumple $w_3 \nVdash \phi$.

Veamos que esto ultimo es equivalente a $w \Vdash \neg\phi$. Es claro que $w \Vdash \neg\phi$ implica $w \Vdash \neg\neg\neg\phi$. Así que supongamos que $w \Vdash \neg\neg\neg\phi$. Sea w' con wRw', hay que demostrar que $w' \nVdash \phi$. Supongamos que $w' \Vdash \phi$, por la proposición 2.4 debe de darse que para todo $w'' \in M$ con $w'Rw''$ $w'' \Vdash \phi$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $w \Vdash \neg\phi$. De aquí que $\neg\phi \leftrightarrow \neg\neg\neg\phi$ sea universalmente verdadera y por lo tanto demostrable.

La demostración de la validez de las otras fórmulas es semejante y lo dejamos para el lector interesado. □

Se nos antoja pensar en la doble negación como un operador de cerradura que convierte la lógica intuicionista en clásica ya que $\neg\neg(\neg\neg\phi) \leftrightarrow \neg\neg\phi$.

Definición Sea $^{neg} : FRM_{LI} \to FRM_{LI}$ el único operador sobre las fórmulas del lenguaje tal que:

(1) Si P_i es un letra proposicional entonces $P_i^{neg} = \neg\neg P_i$
(2) $\perp^{neg} = \perp$.
(3) $(\phi \wedge \psi)^{neg} = \phi^{neg} \wedge \psi^{neg}$.
(4) $(\phi \to \psi)^{neg} = \phi^{neg} \to \psi^{neg}$.
(5) $(\phi \vee \psi)^{neg} = \neg(\neg\phi^{neg} \wedge \neg\psi^{neg})$.

Glivenko nos demuestra que la lógica intuicionista tiene más poder demostrativo en el siguiente teorema:

Teorema 2.10 (Glivenko)**.** *Sea $\phi \in FRM_{LI}$. $\vdash_{CP} \phi$ si y solo si $\vdash_{LI} \phi^{neg}$.*

La demostración es por inducción, quien este interesado puede leerla en. Quiza este teorema sea más transparente a la luz de las Álgebras de Heyting, en donde el limite entre lo clásico y lo intuicionista está escrito en ecuaciones.

2.6. **Álgebras de Heyting.** Sería bueno repasar los conceptos básicos de álgebras booleanas, consultar [2] o [**?**] .

La lógica clásica se encaja naturalmente en álgebras de Boole. Para estudiar el constructivismo de Brower, Heyting invento una especie de estructura distinta pero con el mismo espiritu que las algebras Booleanas.

Definición Sea $(A, \leq)$ una retícula. Se dice que A tiene implicación si para todo par de objetos $a, b \in A$ existe un elemento, denotado por $a \to b$, tal que para todo $c \in A$:

$$c \leq a \to b \iff c \wedge a \leq b$$

Definición Una retícula distributiva con máximo y mínimo $(A, \leq)$ es una álgebra de Heyting si tiene implicación.

Recordemos que una retícula distributiva con máximo y mínimo $(A, \leq)$ puede ser vista como una estructura algebráica con dos operaciones y dos elementos distinguidos $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$.

Proposición 2.11. *Una retícula distributiva $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es una álgebra de Heyting si y solo si existe una operación $\to: A \times A \to A$ con las siguientes propiedades:*

(1) $a \to a = 1$.
(2) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.
(3) $b \wedge (a \to b) = b$
(4) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

Proof. Supongamos que tenemos una operación $\to: A \times A \to A$ que satisface (1)-(4). Sean $a, b \in A$ definimos la implicación de a y b como $a \to b$. Sea $c \in A$ tal que $c \leq a \to b$, entonces $c \wedge a \leq a \wedge a \to b = a \wedge b \leq b$. Supongamos ahora que $c \wedge a \leq b$. Por la propiedad (4) si $y \leq w$ entonces $z \to y \leq z \to w$, de donde:

$$a \to (c \wedge a) \leq a \to b$$
$$(a \to c) \wedge (a \to a) \leq a \to b$$
$$a \to c \leq a \to b.$$

Por lo que:

$$c = c \wedge (a \to c) \leq c \wedge (a \to b) \leq c$$

Por lo tanto $c \leq (a \to b)$. La ida se deja al lector. $\square$

Ejemplos:

(1) Toda álgebra Booleana $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting. Definase la implicación como $a \to b = \neg a \vee b$.

(2) Toda retícula distributiva[5] acotada y completa[6] es un álgebra de Heyting. Definase $a \to b = \bigvee_{c \wedge a \leq b} c = Sup\{c \in A | c \wedge a \leq b\}$.

Proof. Sea $c \in A$ tal que $c \wedge a \leq b$ entonces $c \leq Sup\{d \in A | d \wedge a \leq b\} = a \to b$. Ahora supongamos que $c \leq a \to b = \{d \in A | d \wedge a \leq b\}$ entonces $c \wedge a \leq (\bigvee_{d \wedge a \leq b} d) \wedge a = \bigvee_{d \wedge a \leq b} (d \wedge a) \leq b$. $\square$

(3) Como corolario del ejemplo anterior toda retícula distributiva acotada y finita es una álgebra de Heyting.

En un álgebra de Heyting no hay complementos y por lo tanto negación, lo cual es la única diferencia con las álgebras booleanas. Sin embargo existe la noción de pseudocomplemento.

Definición Sea A álgebra de Heyting y $a \in A$. Un elemento $b \in A$ es un pseudocomplemento de a si $a \wedge b = 0$ y para todo $b \leq c$ $c \wedge a \neq 0$.

Sea $\neg : A \to A$ la operación tal que $\neg a = a \to 0$. Por las propiedades de la implicación $\neg a$ es un pseudocomplemento de a. La operación $\neg$ nos da información acerca de cuanto se parece un álgebra de Heyting a un álgebra Booleana.

Proposición 2.12. *Sea $(A, \leq)$ un álgebra de Heyting. Son equivalentes:*

(1) $(A, \leq)$ es una álgebra booleana
(2) Para todo $a \in A$ $\neg a \vee a = 1$
(3) Para todo $a \in A$ $\neg\neg a = a$

Glivenko es un resultado muy natural en este marco algebráico:

Teorema 2.13. *Sea $A_{\neg\neg}$ el subconjunto de los elementos fijos de la operación $\neg\neg$, es decir el conjunto $A_{\neg\neg} = \{a \in A | \neg\neg a = a\}$. Entonces $A_{\neg\neg}$ es un álgebra booleana y toda álgebra booleana dentro[7] de A contiene a $A_{\neg\neg}$.*

La respuesta a : ¿Por qué son importantes las álgebras de Heyting en la lógica intuicionista? está dada por la siguiente serie de proposiciones y teoremas.

Definición Dos fórmulas ϕ y ψ son equivalentes $\phi \sim \psi$ si $\vdash_{LI} \phi \leftrightarrow \psi$.

Definición Sea $HI = FRM_{LI} / \sim$ las fórmulas módulo equivalencia. A este conjunto el llamaremos el álgebra de lindenbaum para la lógica intuicionista.

Teorema 2.14. *El álgebra de Lindembaum para la lógica intuicionista es una álgebra de Heyting en donde las operaciones están dadas de la siguiente manera:*

(1) $[\phi] \wedge [\psi] := [\phi \wedge \psi]$
(2) $[\phi] \vee [\psi] := [\phi \vee \psi]$
(3) $[\phi] \to [\psi] := [\phi \to \psi]$

---

[5]En este caso pedimos que todos los infimos y los supremos, no solo los finitos, se distribuyan. Esto es $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge b)$ y $(\bigwedge_{i \in I} a_i) \vee b = \bigwedge_{i\ inI} (a_i \vee b)$. Noten que está condicion implica la distributividad común.

[6]Una retícula $(A, \leq)$ es completa si todo subconjunto de A tiene supremo e ínfimo

[7]Decir esto de la manera correcta toma tiempo por lo que se omitirá, es de mayor importancia la intuición que obtenemos de este resultado.

Definición Sea A una álgebra de Heyting. Una A-asignación para el lenguaje es una función $F : LP \to A$. A está función le asociamos la única función $F^* : FRM_{LI} \to A$ tal que $F^*(\perp) = 0$, $F^*(P_i) = F(P_i)$, $F^*(\phi \wedge \psi) = F^*(\phi) \wedge F^*(\psi)$, $F^*(\phi \vee \psi) = F^*(\phi) \vee F^*(\psi)$ y $F^*(\phi \to \psi) = F^*(\phi) \to F^*(\psi)$.

Teorema 2.15. *Una fórmula ϕ es universalmente válida si y solo si para toda álgebra de Heyting A y toda A-asignación F se satisface $F^*(\phi) = 1$.*

Las álgebras de Heyting nos dan una noción semántica distinta, sin embargo el teorema anterior nos asegura que la interpretación con modelos de Kripke no es distinta a nivel lógico. Este resultado es consecuencia de una relación muy estrecha entre ambas estructuras, cuya formulación nos obliga a pisar los terrenos de la teoría de categorías.

2.7. **Categorías.** Las categorías nos brindan la plataforma perfecta para estudiar un género[8] de estructuras. La filosofía categórica propone el estudio del objeto a través su contexto. ¿Qué tanto se parece un objeto específico a sus compañeros? ¿Qué puedo concluir a partir de conocer los elementos comparables? Las respuestas están contenidas en la estructura de categoría. Como en la teoría de grupos, nos interesa estudiar no solo los objetos sino los morfismos entre ellos, una categoría será un conjunto de objetos junto con conjuntos de morfismos.

Definición Una categoría $\mathscr{C}$ consta de:

(1) Una clase de objetos $ob(\mathscr{C})$.
(2) Para cada par de objetos $A, B \in ob(\mathscr{C})$ un conjunto de "flechas" o "morfismos" denotado por $\mathscr{C}(A, B)$.
(3) Para cada terna de objetos A, B, C una función $\circ_{ABC} : \mathscr{C}(B, C) \times \mathscr{C}(A, B) \to \mathscr{C}(A, C)$ llamada la composición. Si $f \in \mathscr{C}(A, B)$ y $g \in \mathscr{C}(B, C)$ a el valor $\circ_{ABC}(g, f)$ se le suele denotar $g \circ_{ABC} f$. De ahora en adelante omitiremos los subindices de $\circ$.
(4) Para cada cuaterna de objetos A, B, C, D , $f \in \mathscr{C}(A, B)$, $g \in \mathscr{C}(B, C)$ y $h \in \mathscr{C}(C, D)$ se satisface la siguiente ecuación
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$
(5) Para cada objeto de la categoría $A \in \mathscr{C}$ un objeto llamado $1_A \in \mathscr{C}(A, A)$ tal que para toda $B, C \in Ob(\mathscr{C})$, $f \in \mathscr{C}(B, A)$ y $g \in \mathscr{C}(A, C)$ se satisface
$$1_A \circ f = f \text{ y } g \circ 1_A = g.$$

Muchas veces se omite el Ob y se escribe $A \in \mathscr{C}$ para decir que A es un objeto de la categoría. Si $f \in \mathscr{C}(A, B)$ se suele escribirse $f : A \to B$ y se dice que A es el dominio de f y B el codominio.

Ejemplos:

(1) La categoría de conjuntos **Con** cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones. La composición es la composición usual de funciones, por lo que es asociativa. Dado un conjunto existe una única función que se comporta como la identidad que es precisamente la identidad $1_X : X \to X$ $1_X(x) = x$.
(2) **Top** es la categoría de los espacios topológicos. Los objetos de está categoría son los espacios topológicos y los morfismos las funciones continuas. La

[8] ver Aristóteles en la introducción

composición de funciones naturalmente se convierte en la composición de morfismos[9]. Ademas la función identidad es trivialmente continua.

(3) **k-Vect** es la categoría de los k espacios vectoriales. Los objetos son los espacios vectoriales sobre k y los morfismos son las transformaciones lineales. La composición y la identidad son las usuales.
(4) **Grp** es la categoría de los grupos. Tiene como objetos a los grupos y como morfismos a los homomorfismos de grupos. La composición y la identidad son las usuales.
(5) $\mathbb{N}$ es la categoría simplicial. Tiene como objetos los naturales no nulos y va a existir una flecha entre n y m si y solo si $n \leq m$. Esto es $\mathbb{N}(n,m) = \{*\}$ si $n \leq m$ y $\mathbb{N}(n,m) = \emptyset$ si $n \gneq m$. La composición está dada por la transitividad de la relación de orden. La identidad es el testigo de que $n \leq n$.
(6) De hecho todo orden parcial $(M, \leq)$ puede verse como una categoría en donde los objetos son los elementos de M y los morfismos son el orden.
(7) **Graph** es la categoría de gráficas. Los objetos son las gráficas y los morfismos entre dos gráficas son funciones entre los vértices que preservan las adyacencias.
(8) Sea G un grupo. Consideremos **G** la categoría que consta de un solo objeto $*$ y tal que $\mathbf{G}(*,*) = G$. La composición de dos morfismos $a, b \in \mathbf{G}(*,*)$ es la multiplicación del grupo $a \circ b = ab$. La composición de morfismos hereda la asociatividad de la multiplicación del grupo, y el neutro juega el papel de la identidad.[10]

Quiza una de las aportaciones más importantes de la teoría es el lenguaje necesario para comparar categorías. Este concepto construye puentes entre diversas ramas de las matemáticas, muchos insospechados.

Definición Un funtor covariante [contravariante] entre dos categorías $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ consta de la siguiente información:

(1) Una función $F_1 : Ob(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{D})$.
(2) Para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{C}$ una función $F_{AB} : \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{D}(F_1A, F_1B)$ $[F_{BA} : \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{D}(F_1B, F_1A)]$ tal que:
   (a) $F_{AA}(1_A) = 1_{F_1A}$ para todo $A \in \mathscr{C}$.
   (b) $F_{A,C}(f \circ g) = F_{B,C}(f) \circ F_{A,B}(g)$ $[F_{CA}(f \circ g) = F_{B,A}(g) \circ F_{C,B}(f)]$ para todo $g \in \mathscr{C}(A,B)$ y $f \in \mathscr{C}(B,C)$.

Por lo general se usa el nombre del funtor para todas las funciones de la definición (es bastante claro cuando se está aplicando a un objeto y cuando a un morfismo).

Ejemplos:

(1) Consideremos **Grp** y **Con**. Construimos el funtor $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Con}$ llamado el funtor que olvida cuya acción sobre los objetos y los morfismos es nula. El funtor simplemente "olvida" que el grupo tiene una estructura algebráica. Es claro que el funtor U definido así es un funtor covariante.
(2) Un funtor más interesante es el funtor potencia. $\wp : \mathbf{Con} \to \mathbf{Con}$ a los objetos les asocia su conjunto potencia $\wp(x) = \{A \subset X\}$ y si $f : X \to Y$ es

[9]Observen que la composición de continuas es continuas por lo que la composición está bien definida.

[10]La importancia de este ejemplo es que la definición de composición de morfismos no algo que hasta ahora se haya pensando comúnmente como composición.

una función, bajo el funtor le asignamos el mapeo inverso $\wp(f) : \wp(Y) \to \wp(X)$: $\wp(f)(A) = f^{-1}(A) = \{x \in X | f(x) \in A\}$. Es un ejercicio verificar que $\wp$ es un funtor contravariante.

(3) Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \mathscr{C}$. Construimos apartir de está información un funtor covariante [11] $\mathscr{C}(A, \_) : \mathscr{C} \to$ **Con** [o contravariante $\mathscr{C}(\_, A) : \mathscr{C} \to$ **Con**] definido de la siguiente manera:
   (a) Sobre los objetos: $\mathscr{C}(A, \_)(B) = \mathscr{C}(A, B)$ [$\mathscr{C}(\_, A)(B) = \mathscr{C}(B, A)$].
   (b) Sobre los morfismos si $f : B \to C$ entonces $\mathscr{C}(A, f) : \mathscr{C}(A, B) \to \mathscr{C}(A, C)$ es la función tal que $\mathscr{C}(A, f)(g) = (f \circ g)$. [$\mathscr{C}(f, A)(g) = (g \circ f)$]

(4) Un caso particular de los funtores representables es muy conocido e importante en álgebra lineal, el espacio dual. * : **k-Vect** $\to$ **k-Vect** es un funtor que a cada espacio vectorial le asocia las funciones lineales del espacio en el campo $V^* =$ **k-Vect**(V, k).

2.8. **Los Marcos de Kripke y las Álgebras de Heyting.** Consideremos las siguientes categorías:

- **Kripke** cuyos objetos son marcos de Kripke, i.e. conjuntos parcialmente ordenados (M, R), y cuyos morfismos son las funciones monótonas. Por función monótona entre dos marcos de Kripke $f : (M, R) \to (N, P)$ nos referimos a una función $f : M \to N$ tal que xRy implica $f(x)Pf(y)$.
- **Heyt** que es la categoría de álgebras de Heyting con morfismos de álgebras de Heyting. Un morfismo entre dos álgebras de Heyting $h : (A, \wedge_A, \vee_A, \to_A, 0_A, 1_A) \to (B, \wedge_B, \vee_B, \to_B, 0_B, 1_B)$ es una función $h : A \to B$ tal que:
  (1) $h(x \wedge_A y) = h(x) \wedge_B h(y)$.
  (2) $h(x \vee_A y) = h(x) \vee_B h(y)$.
  (3) $h(x \to_A y) = h(x) \to_B h(y)$.
  (4) $h(0_A) = 0_B$

El objetivo de está subsección es comparar las dos categorías. Para esto construiremos dos funtores contravariantes, C : **Kripke** $\to$ **Heyt** y P : **Heyt** $\to$ **Kripke**.

Comenzamos definiendo la acción de los funtores sobre los objetos. Sea (M, R) un marco de kripke.

Definición Un subconjunto $S \subset M$ es cerrado si para todo $x \in S$ la existencia de un elemento más grande xRy implica que $y \in S$.

Definición El conjunto de todos los subconjuntos cerrados lo denotaremos por $C(M) = \{S \subset M |$ S es cerrado $\}$.

Ahora basta con una serie de observaciones sencillas para notar que $C(M)$ tiene una estructura de álgebra de Heyting.

Observaciones:

- $C(M)$ puede ser ordenado con la inclusión.
- $\emptyset, M \in C(M)$ son el mínimo y el máximo con este orden.
- Sea $F \subset \wp(C(M))$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces $\bigcup F \in C(M)$ y $\bigcap F \in C(M)$, es decir C(M) es una retícula completa.
- $C(M)$ es una subretícula de $\wp(M)$ y por lo tanto es distributiva, incluso con ínfimos y supremos arbitrarios.

[11]Este tipo de funtores son especiales y reciben el nombre de repesentables

- Por el ejemplo 3 de álgebras de Heyting, $C(M)$ es una álgebra de Heyting con implicación $S \to T = \bigcup\{P \in C(M) | P \cap S \subset T\}$.

Con esto hemos definido la primera parte de un funtor C : **Kripke** $\to$ **Heyt**.

Sea $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ una álgebra de Heyting.

Definición Un ideal I es un subconjunto $I \subset A$ tal que:

(i) $0 \in I$
(ii) Si $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$.
(iii) Si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces $b \in I$.

Definición Un ideal primo es un ideal I tal que si $a \wedge b \in I$ entonces $a \in I$ o $b \in I$.

Definición El conjunto de todos los ideales primos de A será llamado $P(A) = \{I \subset A |$ I es ideal primo$\}$.

Sin ordenamos parcialmente a P(A) con la inclusión entonces $(P(A), \subseteq)$ es un marco de Kripke.

Ahora vamos a definir los funtores sobre los morfismos. Sea $f : (M, \leq) \to (N, \leq)$ una función monótona (esto es $f \in$ **Kripke**(M, N)). Definimos $C(f) : C(N) \to C(M)$ de la siguiente manera: $C(f)(S) = f^{-1}(S)$.

Proposición 2.16. *C(f) es un morfismo de álgebras de Heyting.*

Proof. En primer lugar hay que asegurar que C(f) está bien definida, es decir $C(f)(S) \in C(M)$. Sea $S \in C(N)$, $x \in f^{-1}(S)$ y $x \leq z$. Entonces como f es monótona $f(x) \leq f(z)$. Pero como $f(x) \in S$ y S es cerrado entonces $f(z) \in S$ por lo que $z \in f^{-1}(S)$. Por lo tanto $f^{-1}(S) = C(f)(S) \in C(M)$.

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Por propiedades de la imagen inversa de una función se cumple que $C(f)(\bigcap_{i \in I} S_i) = \bigcap_{i_I} C(f)(S_i)$ y $C(f)(\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i_I} C(f)(S_i)$, y por esto mismo $C(f)$ preserva implicaciones ya que $C(f)(S \to T) = f^{-1}(\bigcup\{L \in C(N) | L \cap S \subseteq T\} = \bigcup\{f^{-1}(L) | L \cap S \subseteq T\}$ por lo que $C(f)(S \to T) \subset (C(f)(S) \to C(f)(T))$. El regreso se deja para el lector audaz.

□

Sea $h : (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1) \to (B, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ un morfismo de álgebras de Heyting. Definimos $P(h) : P(B) \to P(B)$ como la función tal que a un ideal primo I le asocia $P(h)(I) = h^{-1}(I)$.

Proposición 2.17. $P(h)$ *es una función monótona.*

Proof. Comenzaremos probando que $P(h)(I)$ cae en el conjunto correcto, esto es que es un ideal primo:

(1) Como h es un morfismo de álgebras de Heyting $h(0) = 0$ por lo que $0 \in P(h)(I)$.
(2) Sean $a, b \in P(h)(I)$ entonces como h es morfismo e I es un ideal $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) \in I$, por lo que $a \vee b \in P(h)(I)$.
(3) Sea $a \in I$ y $b \leq a$, entonces $h(b) \leq h(a)$ ya que $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) = h(b)$. Como I es un ideal entonces $h(b) \in I$, por lo tanto $b \in P(h)(I)$.
(4) Sean $a, b \in A$ tales que $a \wedge b \in P(h)(I)$. Entonces $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) \in I$. Pero I es un ideal primo entonces $h(a) \in I$ o $h(b) \in I$. Así $a \in P(h)(I)$ o $b \in P(h)(I)$, esto es $P(h)(I)$ es un ideal primo.

Ahora sean $I \subset J$ dos ideales primos en B. Entonces $h^{-1}(I) \subset h^{-1}(J)$ por lo que $P(h)$ es monótona, o bien es un morfismo de la categoría **Kripke**. □

Dos propiedades de la imagen inversa convierten a P y a C en funtores, a saber $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ y $1_A^{-1}(S) = S$. Podría ser que este par de funtores constituyera una equivalencia de categorías, es decir sean testigos de la igualdad de la estuctura categórica, sin embargo no es así. Las categorías **Kripke** y **Heyt** no son equivalentes, pero si hay mucho que se puede comparar con estos funtores. Para ver las relaciones que surgen apartir de estos funtores vease [12].

Como hemos observado el conjunto de subconjuntos cerrados es una retícula completa, además todo conjunto cerrado D puedes ser descrito como el supremo de los siguientes conjuntos cerrados $D = \bigcup_{d \in D}\{d' | d \leq d'\} = \bigcup_{d \in D} d^{\uparrow}$ que poseen la propiedad de que $d^{\uparrow} \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ si y solo si $d^{\uparrow} \subset X_i$ para algún i.

Definición Un elemento a de una retícula completa es totalmente supremo-primo si $a \leq \bigvee X$ implica que existe $x \in X$ tal que $a \leq x$.

Teorema 2.18. *Un álgebra de Heyting A es isomorfa a C(M) para algun marco de Kripke M si y solo si A es completa y todo elemento es supremo de elementos totalmente supremo-primo.*

Proof. Sea $(A, \leq)$ una álgebra de Heyting completa y donde todo elemento es supremo de elementos totalmente supremo-primos. Consideremos el conjunto $TSP(A) = \{a \in A|$ a es totalmente supremo-primo $\}$. Si restringimos el orden del álgebra de Heyting a este conjunto y lo invertimos, obtenemos un conjunto parcialmente ordenado o un marco de Kripke $(TSP(A), \leq_*)$ ($a \leq_* b$ si y solo si $b \leq a$). Veamos que $A \simeq C(TSP(A))$. Definimos el isomorfismo $\phi : C(TSP(A)) \to A$ de la siguiente manera: $\phi(D) = \bigvee D$. Veamos que ϕ es un morfismo biyectivo:

- Si $\phi(D) = \phi(C)$ entonces $\bigvee D = \bigvee C$. Sea $x \in D$ entonces $x \leq \bigvee C$ por lo que existe un $c \in C$ tal que $x \leq c$. Esto implica que $c \leq_* x$ en TSP(A) y como C es cerrado $x \in C$. Por lo que $D \subset C$. Analogamente $C \subset D$. Por lo tanto $C = D$.
- Sea $d \in A$. Entonces d es el supremo de totalmente supremo-primos $d = \bigvee\{p \in A|p \leq d$ y p es totalmente supremo-primo $\}$. Observemos que $D = \{p \in A|p \leq d$ y p es totalmente supremo-primo $\}$ es un conjunto cerrado en $TSP(A)$ por lo que $d = \phi(D)$.
- $\phi(D \cap C) = \bigvee\{p \in D \cap C\} \leq \bigvee\{p \in D\} \wedge \bigvee\{p \in C\}$. Ahora $\bigvee\{p \in D\} \wedge \bigvee\{p \in C\} = \bigvee\{r_i\}_{i \in I}$ para algunos r_i totalmente supremo-primos. $r_i \leq \bigvee\{p \in D\} \wedge \bigvee\{p \in C\}$ por lo que $r_i \leq \bigvee\{p \in D\}$ y $r_i \leq \bigvee\{p \in C\}$, pero como r_i es t.s.p. entonces existe $p \in D$ y $p' \in C$ tal que $r_i \leq p$ y $r_i \leq p'$, en otras palabras $p \leq_* r_i$ y $p' \leq_* r_i$. Dada la propiedad de cerradura de D y C esto implica que $r_i \in D \cap D$. Por lo tanto $\phi(D \cap C) = \phi(D) \wedge \phi(C)$.
- $\phi(D \cup C) = \bigvee\{p \in D \cup C\} = \bigvee\{p \in D\} \vee \bigvee\{p' \in C\} = \phi(D) \vee \phi(C)$.
- $\phi(D \to C) = \bigvee\bigcup\{B \in TSP(A)|B \cap D \subset C\} = \bigvee\{B \in C(TSP(A))|B \cap D \subset C\}$. Por otro lado $\phi(D) \to \phi(C) = \bigvee\{b \in A|b \wedge \bigvee D \leq \bigvee C\}$. Sea $B \in C(TSP(A))$ tal que $B \cap D \subset C$ y sea $b = \bigvee B$, entonces por las propiedades previamente demostradas $b \wedge \phi(D) \leq \phi(C)$ por lo que $b \leq \phi(D) \to \phi(C)$. Sea $b \in A$ tal que $b \wedge \bigvee D \leq \bigvee C$ y consideremos $b^{\downarrow} = \{p \in TSP(A)|p \leq b\}$ lo cual es un conjunto cerrado en $M(TSP(A))$. Es claro que $b^{\downarrow} \cap D \subset C$. Por lo tanto $\phi(D \to C) = \phi(D) \to \phi(C)$.

$\square$

Existen muchas ventajas de trabajar con estructuras algebráicas en vez de conjuntos de fórmulas y relaciones de implicación lógica. La correspondencia de Lógica-Álgebra nos dice mucho más de lo que ya se ha visto aquí. Por ejemplo, entre la lógica intuicionista y la lógica clásica existen varias lógicas distintas, todas extensiones de la intuicionista y restricciones de la clásica, y a cada una de estas extensiones le corresponde una estructura algebráica que oscila entre las álgebras de Heyting y las álgebras booleanas. Esta correspondencia tiene propiedades agradables, por lo que puede reducirse el estudio de las lógicas intermedias entre IPC y CP al estudio de las ciertas estructuras algebráicas entre **Heyt** y **Boole**. Para leer más consulte [21], [3] o [24].

3. Lógica Modal

En la lógica clásica las proposiciones tienen un caracter definitivo, binario, si o no. Sin embargo casos en los cuales la verdad no es una entidad estática abundan por doquier, en matemáticas o en ambientes más filosóficos. Aceptando la premisa de la variabilidad de la validez de una proposición, tenemos que modificar el lenguaje, adaptarlo para expresar lo cambiante. La modificación que se introduce es la de asignar modos a las proposiciones, más en detalle se les asigna un juicio de plausibilidad: es posible o es necesario. Es la introducción de estos modos al lenguaje lo que le da el nombre de lógica modal.

Aunque existían desde Aristóteles algunos tratados de lógica modal todos eran informales. Alrededor de 1950 varias lógicas con modificadores modales se introducen para modelar situaciones distintas, como la lógica temporal o la lógica dinámica. La lógica modal moderna (como es presentada aquí) surge en 1959 de un Saul Kripke de 19 años cuando define la semántica de los mundos posibles dando una base firme para la investigación de está especie de lógica. Todas estas lógicas modales tienen aplicaciones para la computación, las categorías, la literatura, la linguística, las ciencias sociales, la historia, entre otras.

3.1. **Semántica de los "Mundos Posibles".** Nuestro objetivo es modelar un mundo en donde la verdad cambia. Además deseamos que se manifiesten ciertas relaciones entre la verdad en los diferentes estados del "mundo".

Definición Un marco de Kripke para la lógica modal es una pareja (M, R) en donde M es un conjunto y R una relación binaria. A R se le llama la relación de accesibilidad y a los elementos de M mundos.

Antes de decir como interpretamos el lenguaje tenemos que ser más precisos con nuestro lenguaje. Para esta lógica aceptaremos los siguientes símbolos:

$$\mathscr{L} = \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}, \cup\{(,)\} \cup \{\Box, \Diamond\}$$

Definición Una expresión α de $\mathscr{L}$ es una fórmula si:

- $\alpha = p_i$.
- $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$ para algunas fórmulas β y γ.
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ para algunas fórmulas β y γ.
- $\alpha = (\beta \vee \gamma)$ para algunas fórmulas β y γ.
- $\alpha = (\neg\beta)$ para alguna fórmula β.
- $\alpha = (\Box\beta)$ para alguna fórmula β.
- $\alpha = (\Diamond\beta)$ para alguna fórmula β.

El conjunto de las fórmulas es FRM_{LM}. Daremos el significado de "es necesario que β" a $\Box\beta$ y "es posible que β" a $\Diamond\beta$. Para esto debemos de darle un valor de verdad a las fórmulas atómicas, i.e. proposiciones, en cada mundo de nuestro modelo.

Definición Sea (M,R) un marco de Kripke para la lógica modal. Una (M,R)-asignación es una función $V : M \times \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to \{0,1\}$. Al valor $V(w, p_i)$ se le llama el valor de verdad de p_i en el mundo w.

Definición A una terna (M, R, V) donde (M, R) es un marco de Krikpe para la lógica modal y V es una (M, R)-asignación se le llama modelo de Kripke para la lógica modal [12].

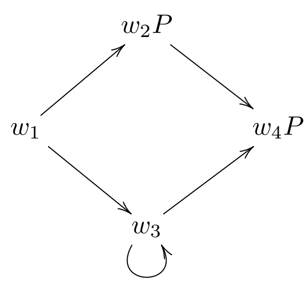
La semántica se define de la siguiente manera:

Semántica de Kripke Sea (M, R, V) un modelo de Kripke. Definimos la satisfacibilidad por mundos y recursivamente. Sea $w \in M$:

(1) $w \vDash p_i$ si $V(w, p_i) = 1$
(2) Para las fórmulas compuestas
  (a) $w \vDash (\beta \to \gamma)$ si $w \vDash \gamma$ o $w \nvDash \beta$.
  (b) $w \vDash (\beta \vee \gamma)$ si $w \vDash \gamma$ o $w \vDash \beta$.
  (c) $w \vDash (\beta \wedge \gamma)$ si $w \vDash \gamma$ y $w \vDash \beta$.
  (d) $w \vDash (\neg\beta)$ si $w \nvDash \beta$.
  (e) $w \vDash (\Box\beta)$ si para todo $w' \in M$ tal que wRw' $w' \vDash \beta$.
  (f) $w \vDash (\Diamond\beta)$ si existe $w' \in M$ con wRw' y $w' \vDash \beta$.

Es notable la similitud con la lógica intuicionista, sin embargo aquí no se imponen restricciones a los modelos aceptables y la interpretación de la implicación es distinta. Sin embargo existe un resultado que establece que la lógica intuicionista puede verse como un caso particular de lógica modal.

Ejemplo: Consideremos (M,R,V):



.

Donde la aparición de P a lado de un mundo significa que $V(w, P) = 1$. Observemos que $w_1 \nvDash \Box P$ pero $w_2 \vDash \Box P$, que $w_1, w_2, w_2 \vDash \Diamond P$.

Es interesante investigar las diferencias semánticas que surgen de marcos de Kripke distintos. Nos gustaría definir una manera de comparar modelos de tal suerte que dos modelos comparables satisfagan las mismas fórmulas, en otras palabras definir una equivalencia de modelos. La noción correcta es la de bisimulación:

Definición Sean (M,R,V) y (N,S,W) dos modelos de Kripke. Una bisimulación es una relación binaria $E \subset M \times N$ no vacía tal que:

(1) Para todo $x \in M$ $y \in N$ si xEy entonces $V(P_i, x) = W(P_i, y)$. En otras palabras los mundos relacionados satisfacen las mismas letras proposicionales.

[12]De ahora en adelante omitiremos "para la lógica modal".

(2) Si $x \in M$ $y \in N$, xEy y xRu entonces existe un $w \in N$ tal que uEw y ySw.
(3) Si $x \in M$ $y \in N$, xEy y ySw entonces existe un $u \in M$ tal que uEw y xRu.

Proposición 3.1. *Sea E una bisimulación entre (M,R,V) y (N,S,W), $\alpha \in FRM_{LM}$. Sean $x \in M$ y $y \in N$ tales que xEy entonces $x \vDash \alpha$ si y solo si $y \vDash \alpha$.*

Proof. Por inducción sobre la formación de fórmulas. □

3.2. **Fórmulas Válidas.**

Definición Un modelo de Kripke (M, R, V) satisface una fórmula α (en símbolos $(M, R, V) \vDash \alpha$) si $w \vDash \alpha$ para todo $w \in M$.

Definición Un marco de Kripke (M, R) satisface una fórmula α ($(M, R) \vDash \alpha$) si para toda (M,R)-asignación V se tiene que $(M, R, V) \vDash \alpha$.

Definición Una fórmula α es válida en la lógica modal ($\vDash_{LM} \alpha$) si todo marco de Kripke la satisface.

Definición Sea $VAL_{LM} = \{\alpha \in FRM_{LM} | \vDash_{LM} \alpha\}$.

La preguntas obvias son: ¿Qué fórmulas están en este conjunto? ¿Cómo podemos saber si una fórmula está o no en el conjunto? ¿Existe un cálculo axiomático para este conjunto? Respondamos paso a paso.

Una clase de fórmulas que naturalmente resultan válidas son las tautologías de la lógica clásica. Esto es consecuencia de que en cada mundo la verdad se comporta de manera clásica, los conectivos tienen el mismo significado.

Definición Un bloque es una fórmula de la forma P_i o $\Box\alpha$ o $\Diamond\alpha$. El conjunto de los bloques es denotado por $\mathbb{B}_{LM}$.

Proposición 3.2. *Las fórmulas están libremente generadas por $\rightarrow, \vee, \wedge$ y $\neg$ a partir de los bloques.*

Proposición 3.3. *Sea (M, R, V) un modelo de Kripke y $w \in M$. Está información define una asignación de verdad sobre los bloques $V_w : \mathbb{B}_{LM} \rightarrow 0, 1$:*

$$V_w(\alpha) = 1 \text{ si y solo si } w \vDash \alpha.$$

Que se extiende a todas las fórmulas $V_w^* : FRM_{LM} \rightarrow 0, 1$ y $V_w^*(\alpha) = 1$ si y solo si $w \vDash \alpha$.

Proof. Por la proposición anterior la asignación de verdad puede extenderse a todas las fórmulas por recursión de la manera usual. Demostremos por inducción que $V_w^*(\alpha) = 1$ si y solo si $w \vDash \alpha$.

Si α es un bloque entonces por definición de $V_w^*(\alpha)$ se cumple que $V_w^*(\alpha) = 1$ si y solo si $w \vDash \alpha$.

Si α es de la forma $\beta \rightarrow \gamma, \beta \wedge \gamma, \beta \vee \gamma$ o $\neg\beta$ entonces el resultado se sigue de la hipótesis de inducción, de la manera de extender la asignación y la definición de satisfacibilidad de Kripke. □

Proposición 3.4. *Toda tautología es válida.*

Proof. Sea α una tautología. Por la proposición anterior si (M, R, V) es un modelo de Kripke y $w \in M$ entonces $V_w^*(\alpha) = 1$ si y solo si $w \vDash \alpha$. Pero como α es una tautología $V_w^*(\alpha) = 1$ luego $w \vDash \alpha$. □

¿Qué tipo de inferencias son correctas para está semántica?

Proposición 3.5. *Sean α y $\alpha \to \beta$ fórmulas válidas, entonces β es válida.*

Proof. Sea (M, R, V) un modelo de Kripke y $w \in M$. Como α y $\alpha \to \beta$ son válidas entonces $w \vDash \alpha$ y $w \vDash \alpha \to \beta$. Por la definición de Kripke $w \vDash \alpha \to \beta$ si y solo si $w \vDash \alpha$ implica $w \vDash \beta$. Por lo tanto $w \vDash \beta$. $\square$

Proposición 3.6. *Si α es una fórmula válida entonces $\Box\alpha$ tambien.*

Proof. Sea (M, R, V) un modelo de Krikpe y $w \in M$. Entonces $w \vDash \Box\alpha$ si y solo si para todo w' con wRw' se satisface $w' \vDash \alpha$. Dado que α es válida $w' \vDash \alpha$ sin importar el modelo por lo que $w \vDash \Box\alpha$. $\square$

Otra cuestion importante es la manera en que se relacionan los conectivos clásicos con los nuevos conectivos modales. Por el teorema de las tautologías 3.4 es inmediato que los conectivos clásicos se siguen comportando de la misma manera, a saber se siguen cumpliendo las relaciones: $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ o $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$. Otras relaciónes que son inmediatas son las siguientes: $\Box\alpha \equiv \neg\Diamond\neg\alpha$ y $\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$. Otra menos trivial:

Proposición 3.7. *Sean α y β fórmulas. La fórmula $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ es válida.*

Proof. Sea (M, R, V) un modelo de Kripke y $w \in M$. Para demostrar que $w \vDash \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ suponemos que $w \vDash \Box(\alpha \to \beta)$ y demostramos que $w \vDash \Box\alpha \to \Box\beta$. Supongamos que $w \vDash \Box\alpha$, y sea w' tal que wRw'. Por nuestras hipótesis $w' \vDash (\alpha \to \beta)$ y $w' \vDash \alpha$. Por lo tanto $w' \vDash \beta$, con lo que concluimos que $w \vDash \Box\beta$. $\square$

En cuanto a la computabilidad de la validez de una fórmula tenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.8 (Finitud)**.** *Una fórmula es válida si y solo si todo marco de Kripke finito la satisface.*

Teorema 3.9. *El conjunto de fórmulas válidas es decidible y su complejidad es PSPACE.*

3.3. **Cálculo Axiomático.** La subsección anterior nos demostró que es inecesario trabajar con todos los conectivos lógicos, así que reducimos nuestro lenguaje a:

$$\mathscr{L} = \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{\to, \neg\}, \cup \{(,)\} \cup \{\Box\}$$

Si queremos construir un sistema axiomático que sea capaz de demostrar todas las fórmulas válidas, debemos incluir las tautologías, por lo que una lista de axiomas podría empezar así:

(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.
(2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.
(3) $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$.

Si además añadimos el siguiente esquema de axioma

(4) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

y las reglas de inferencia:

Necesidad (N): Si α entonces $\Box\alpha$.
Modus Ponens (MP): Si α y $\alpha \to \beta$ entonces β.

Obtenemos el sistema K (en honor a Krikpe) de la lógica modal.

El siguiente teorema asegura la correctud y completud del sistema K. La demostración puede consultarse en **??**

Teorema 3.10. $\vdash_K \alpha$ *y solo si* $\vDash_{LM} \alpha$.

De hecho puede fortalecerse el resultado con la definición de consecuencia lógica.

Definición Sea $\Gamma \subset FRM_{LM}$. Se dice que una fórmula α es una consecuencia lógica ($\Gamma \vDash_{LM} \alpha$) si para todo modelo de Kripke (M, R, V) y $w \in M$ tal que $w \vDash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, w tambien satisface a α, i.e. $w \vDash \alpha$.

Teorema 3.11. *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subset FRM_{LM}$. $\Gamma \vDash_{LM} \alpha$ *si y solo si* $\Gamma \vdash_K \alpha$.

3.4. **Marcos no Normales.** Como hemos presenciado a lo largo de estas notas la validez depende de como y donde se interpreta el lenguaje. La válidez de una fórmula en la lógica modal está sujeta a la condición de ser satisfecha por todos los marcos de Kripke, lo cual es bastante restrictivo. Más aun, es deseable estudiar la lógica que emana de marcos con una característica distintiva, por lo que la válidez universal deja de ser un concepto intrínseco a está lógica. En general, tomemos $\mathscr{F}$ una familia de marcos (podría ser una clase propia) y sea $Val_{\mathscr{F}}$ el conjunto de fórmulas que son satisfechas en todos los marcos de $\mathscr{F}$. Es posible estudiar estos conjuntos en dos niveles: en primer lugar intentar de dar una axiomatización de estos conjuntos, en segundo lugar estudiar las relaciones entre estos conjuntos para distintas familias de marcos.

Por ejemplo es sencillo ver que si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ entonces $Val_{\mathscr{G}} \subset Val_{\mathscr{F}}$. En realidad hemos definido un funtor de la categoría **Mar** [13] en $\wp(FRM_{LM})$[14] y podríamos definir un funtor de regreso que a cada subconjunto de fórmulas le asigne la familia de marcos en los cuales se sastisfacen todas las fórmulas del subconjunto.

En está sección estudiaremos un poco de las dos visiones.

En primer lugar definiremos una serie de clases de marcos que son de nuestro interés:

Nombre	**Característica**
D	La relación de los marcos de D es serial.
M	La relación de los marcos de M es reflexiva.
4	La relación de los marcos de 4 es transitiva.
B	La relación de los marcos de B es simétrica.
5	La relación de los marcos de 5 es euclidiana.

[15]

Cada una de estas clases tiene su lógica interna, que puede ser axiomatizada facilmente añadiendo un solo esquema de axioma al sistema K.

[13]Que es la versión categórica de la clase parcialmente ordenada de familias de Marcos de Kripke, aunque es posible que está categoría no exista a causa de problemas conjuntistas de tamaño, sin embargo podemos aceptar un axioma definido por Grothendieck el cual nos asegura que todo esto existe en algún universo. Otra manera de resolver el problema conjuntista es considerar el conjunto de todos los marcos de Kripke (x,R) $x \in \omega^+$ y luego el COPO de familias de este tipo de marcos. Esto es posible gracias a Lowenheim-Skolem.

[14]Es la versión categórica del copo de subconjuntos de FRM_{LM} ordenados con la inclusión.

[15]Un marco (M,R) es Euclidiano si $w, w', w'' \in M$, wRw' y wRw'' entonces $w'Rw''$.

Nombre	Característica	Esquema de Axioma
D	La relación de los marcos de D es serial.	$\Box\alpha \to \Diamond\alpha$
M	La relación de los marcos de T es reflexiva.	$\Box\alpha \to \alpha$
4	La relación de los marcos de S4 es transitiva.	$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
B	La relación de los marcos de B es simétrica.	$\alpha \to \Box\Diamond\alpha$
5	La relación de los marcos de S5 es euclidiana.	$\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

Y de hecho estas axiomatizaciones son tan adecuadas que es posible demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.12. *Los sistemas antes mencionados son correctos y completos con respecto a ser válidos en sus familias de marcos correspondientes.*

Es interesante observar como la propiedad de ser serial o reflexiva se puede expresar con un conjunto de fórmulas modales. Más adelante hablaremos de la expresividad del lenguaje modal, y daremos un ejemplo para el cual el lenguaje se queda corto.

Ahora interesa estudiar la estructura de las teorías de lógica modal. Para esto regresemos al par de funtores mencionados y demos una definición más precisa. Consideremos las siguientes categorías:

- **Mar**
  (1) Los objetos son familias de marcos de Kripke construidos sobre ordinales contables. Puede pensarse que los objetos son los elementos del conjunto potencia de **Kripke** $= \{(x, R)|x \in \omega^+, R \subset n \times n\}$.
  (2) Los morfismos son el orden inducido por la inclusión como en el ejemplo (6) de categorías.
- $\wp(FRM_{LM})$
  (1) Los objetos son los elementos del conjunto potencia de FRM_{LM}.
  (2) Los morfismos son los del orden de la inclusión.

Sea $Mod : \wp(FRM_{LM}) \to$ **Mar** la función que a un subconjunto de fórmulas Γ le da el valor $Mod(\Gamma) = \{(x, R) \in$ **Kripke**$|\forall\gamma \in \Gamma\ (x, R) \vDash \gamma\}$. Si $\Gamma \subset \Sigma$ entonces es claro que $Mod(\Sigma) \subset Mod(\Gamma)$, por lo que Mod es un funtor contravariante.

Sea Val : **Mar** $\to \wp(FRM_{LM})$ la funcíon definida como sigue, $Val(\mathscr{F}) = \{\alpha \in FRM_{LM}|\forall(M, R) \in \mathscr{F}\ (M, R) \vDash \alpha\}$. Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ entonces $Val(\mathscr{G}) \subset Val(\mathscr{F})$. Esto define un funtor contravariante.

Proposición 3.13. *Sea $\Gamma \subset FRM_{LM}$ y $\mathscr{F} \in$ **Mar**, entonces:*

(1) $\Gamma \subset Val(Mod(\Gamma))$.
(2) $\mathscr{F} \subset Mod(Val(\mathscr{F}))$.
(3) $Mod(Val(Mod(\Gamma))) = Mod(\Gamma)$
(4) $Val(Mod(Val(\mathscr{F}))) = Val(\mathscr{F})$
(5) $Val_{LM} \subset Val(\mathscr{F})$.
(6) $Mod(\Gamma) = \emptyset$ *si y solo si* Γ *es inconsistente.*
(7) $Val(\mathscr{F})$ *es una teoría, en otras palabras es cerrado bajo deducciones.*

La figura 1 es un diagrama de la relación entre las lógicas que se obtienen al combinar las familias D,M,4,5,B. Estos funtores nos brindan información acerca de la expresividad de la lógica modal. La expresividad de un lenguaje es la capacidad que tiene para distinguir objetos. En el caso actual, la reflexividad de un marco de Kripke sí puede ser axiomatizada con un enunciado de LM, sin embargo

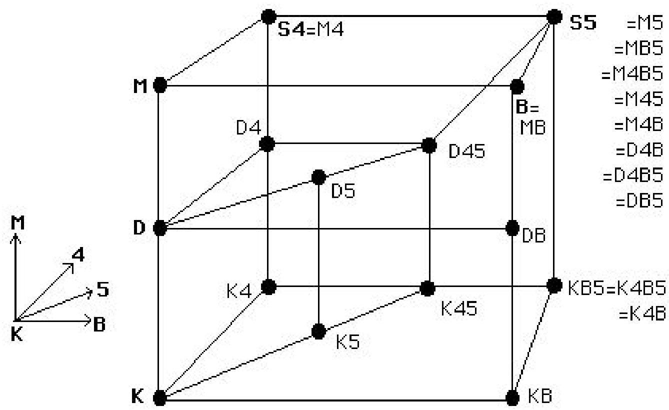


FIGURE 1. Lógicas Modales

propiedades como ser finito no. Para medir la expresividad podemos elegir una propiedad de los marcos de Kripke, lo cual define una familia $\mathscr{F}$. Qué tanto difiere $\mathscr{F}$ de $Mod(Val(\mathscr{F}))$ podría ser una medida de la expresabilidad de la propiedad elegida. En el caso de que $\mathscr{F} = Mod(Val(\mathscr{F}))$ (como en el ejemplo de los marcos simétricos) podríamos exigir que $Val(\mathscr{F})$ fuera axiomatizable. Preguntas de este género constituyen una rama de la lógica modal llamada Teoría de Correspondencia Modal en donde uno de los resultados principales es caracterizar cuando una propiedad de primer orden sobre los marcos tiene un axioma correspondiente en la lógica modal. Lo enunciamos aquí, pero para mayor profundidad y la demostración consultar [8].

Teorema 3.14. *Sea ϕ una propiedad de primer orden sobre los marcos de Kripke y α una fórmula modal. Entonces:*

(1) Existe una fórmula de primer orden que caracteriza la familia $Mod(\alpha)$ si y solo si α se preserva bajo ultrapotencias[16]*.*

(2) Existe un axioma modal para los modelos que satisfacen ϕ si y solo si la clase $Model(\phi) = \{(M,R) \in \textbf{Kripke} | (M,R) \vDash \phi\}$ es cerrada bajo submarcos generados, uniones disjuntas, imagenes de morfismos y extensiones inversas de ultrafiltros.

3.5. **Traducciones.** Si restringimos la lógica modal a un solo mundo y omitimos los operadores modales recuperamos la lógica clásica. Es tan cierto que la lógica modal es una extension del cálculo proposicional que hemos demostrado que las tautologías tambien son teoremas de K, la lógica modal más débil. Sin embargo, la introducción de los operadores modales añade complejidad al lenguaje. Esta complejidad está compensada por la nueva expresividad de $\Box$.

Alternativamente la lógica modal puede ser pensada como una restricción de la lógica de primer orden. El símbolo $\Box$ es un cuantificador universal sobre los mundos accesibles por lo que podemos modelar la semántica de kripke de la siguiente manera:

[16]vease la sección de lógica multivaluada

Definición Sea $^l : FRM_{LM} \to FRM_\rho$ [17] la única función definida por recursión de la siguiente manera:
$P_i^l = P_i(v_0)$
$(\alpha \to \beta)^l = \alpha^l \to \beta^l$.
$(\alpha \wedge \beta)^l = \alpha^l \wedge \beta^l$.
$(\alpha \vee \beta)^l = \alpha^l \vee \beta^l$.
$(\neg\beta)^l = \neg\beta^l$.
$(\Box\alpha)^l = \forall x(R(y,x) \to \alpha^l(x))$.

Teorema 3.15. *Una fórmula α es válida en la lógica modal si y solo si α^l es universalmente válida para la lógica de primer orden.*

Así podemos transportar la lógica modal a la lógica primer orden, razonar dentro de su semántica, y luego regresar para argumentar la validez de la fórmula. El fragmento que se obtiene bajo está traducción es la porción modal de la lógica de primer orden. La ventaja de usar solo ese fragmento es que la verdad universal de esas fórmulas sí es decidible mientras que el lenguaje de las fórmulas universalmente válidas no lo es. Es común encontrar un balance entre expresabilidad y computabilidad en todas las lógicas.

También, la semántica de la lógica intuicionista se asemeja bastante a la dada por Kripke para la lógica modal. De hecho es posible pensar a la lógica intuicionista como un caso particular de la lógica modal. De la misma manera en que haciamos una traducción de la lógica proposicional para insertarla en el cálculo intuicionista es posible hacer una transformación del lenguaje intuicionista para interpretarlo en la modal.

En primer lugar debemos de decir a donde vamos a traducir el lenguaje LI. Empezemos con los marcos de Kripke transitivos y reflexivos, es decir el sistema B4 . El condicional intuicionista $\alpha \to \beta$ era satisfecho en un mundo w si era satisfecho el condicional clásico en todos los mundos accesibles desde w. En la lógica modal esto es lo mismo que la satisfaccion de la fórmula $\Box(\alpha \to \beta)$ en w. Ademas en la lógica intuicionista se requería que la asignación de verdad de las letras proposicionales fuera monótona. Esto puede simularse pidiendo que todas las letras proposicionales se cambien por $\Box p$, lo cual implicaría que si un mundo satisface $\Box p$ entonces todo mundo posterior satisface $\Box p$.

Seamos un poco más formales y definamos la traducción adecuada:

Definición Sea $^m : FRM_{LI} \to FRM_{LM}$ la única función definida por recursión tal que:

(1) $p^m = \Box p$
(2) $\bot^m = p \wedge \neg p$
(3) $\alpha \wedge \beta = \alpha^m \wedge \beta^m$
(4) $\alpha \vee \beta = \alpha^m \vee \beta^m$
(5) $\alpha \to \beta = \Box(\alpha^m \to \beta^m)$

Teorema 3.16. *Sea $\alpha \in FRM_{LI}$, (M,R) un modelo de Kripke transitivo y reflexivo y $w \in m$. Entonces*

(1) $\vdash_{IPC} \alpha$ si y solo si $\vdash_{B4} \alpha^m$.
(2) $w \Vdash_{LI} \alpha$ si y solo si $w \vDash_{LM} \alpha^m$.

[17] En este caso $\rho = \{P_i\} \cup \{R\}$

3.6. **Aplicaciones.** La lógica modal se desarrollo independientemente en contextos tanto filosóficos como computacionales (y más) y solo fue hasta la semántica de Kripke que todas se unificaron bajo la bandera de la modalidad. En está sección presentamos esas presentaciones tempranas que se han convertido en aplicaciones de la lógica modal.

3.6.1. *Lógica Epistémica.* A los filósofos les interesaba describir un modelo sencillo en donde se pueda hablar acerca del conocimiento de un agente inmerso en un mundo de posibilidades. Imaginemos un individuo experimentado con un modo de pensamiento establecido. Sus redes de referencias mentales, la configuración de su pensamiento, permite o concibe solo cierto tipo de relaciones causales entre distintos escenarios posibles. Un ejemplo burdo es el de un creyente: su conocimiento previo le permite imaginar un mundo en el cual un ser supremo sea el causante de cierto infortunio, aunque tambien puede imaginar un mundo en el cual el infortunio sea mera coincidencia; por otro lado un ateo ferreo es incapaz (o al menos así lo obligan sus creencias) de imaginar el mundo capitaneado por el ser supremo.

Ahora si imaginamos un espacio en donde cada punto corresponde a una configuración de hechos imaginable, entonces la categoría mental de causalidad del individuo determina qué mundo es posible que evolucione a partir de qué mundo. Lo que hemos definido es un marco de Kripke que contiene información psicológica del actor.

Pero demos ahora otra perspectiva: consideremos no todas las configuraciones de hechos imaginables sino solo los posibles y, en vez de hablar de la relación de accesibilidad como una relación causal, la pensamos como la información almacenada en el individuo. Supongamos ahora que nuestro actor está en una situación de la cual no tiene información completa. Esta persona puede imaginarse diferentes resultados, sin embargo, lo que ya sabe no puede imaginarlo distinto. Pongamos un ejemplo para clarificar: una persona entra a un juego de dominó, al recibir sus fichas capta la información de las fichas que posee y de las que los demas poseen; sin embargo no es capaz de distinguir qué ficha tiene cada jugador. Si colocamos todas las configuraciones de fichas posibles, el jugador sabrá que solo configuraciones en donde él tiene las mismas fichas son posibles.

Lo que se quiere modelar es este tipo de situaciones y poder hablar a cerca de lo que un agente sabe y de lo que cree posible. Si añadimos más agentes entonces se complica un poco el juego pero se vuelve más interesante ya que podemos hablar acerca de lo que x sabe de lo que y sabe etc.

Establezcamos las bases formales de la lógica epistémica:

- Comenzamos con un conjunto de individuos G.
- El lenguaje será construido con los siguiente simbolos: $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{(,)\} \cup \{\rightarrow, \neg, \wedge, \vee\} \cup \{K_i\}_{i\in G} \cup \{C_G\}$.
- $K_i\alpha$ será intepretado como: "i sabe que α". $C_G\alpha$ significará "es de conocimiento común que α".
- Las fórmulas están construidas recursivamente a partir de las letras proposicionales P_i de la manera usual: Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\neg\alpha), (K_i\alpha), (C_G\alpha)$ son fórmulas.
- Para interpretar el lenguaje debemos de dar un marco de Kripke para cada individuo, pero deben de estar basados en un mismo conjunto de mundos. Un marco para la lógica epistémica es $(M, \{R_i\}_{i\in G})$ donde M es un conjunto

y $R_i \subset M \times M$ es una relación binaria llamada la relación de accesibilidad del individuo i.

- Un modelo para la lógica epistémica, $(M, \{R_i\}_{i\in G}, V)$, consta de un marco $(M, \{R_i\}_{i\in G})$ junto con una asignación de verdad para las letras de los proposicionales en los mundos $V : \{P_i\}_{i\in \mathbb{N}} \times M \to 0, 1$.

La semántica es la siguiente:

Definición Sea $(M, \{R_i\}_{i\in G}, V)$ un modelo para la lógica epistémica y $w \in M$. Se dice que w satisface una fórmula α, en símbolos $w \vDash_{LE} \alpha$ si:

(1) $\alpha = P_i$ y $V(P_i, w) = 1$.
(2) $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ y $w \vDash_{LE} \beta$ y $w \vDash_{LE} \gamma$.
(3) $\alpha = (\beta \vee \gamma)$ y $w \vDash_{LE} \beta$ o $w \vDash_{LE} \gamma$.
(4) $\alpha = (\beta \to \gamma)$ y $w \vDash_{LE} \gamma$ o $w \nvDash_{LE} \beta$.
(5) $\alpha = (\neg\beta)$ y $w \nvDash_{LE} \beta$.
(6) $\alpha = (K_i\beta)$ y $w' \vDash_{LE} \beta$ para todo $w' \in M$ tal que wR_iw'.
(7) $\alpha = (C_G\beta)$ y $w' \vDash_{LE} \beta$ para todo $w' \in M$ accesible a partir de w' y un número finito de pasos con las relaciones R_i.

Terminamos está sección con un ejemplo de una situación curiosa en donde usar el lenguaje epistémico. Supongamos que un individuo A no tiene la información acerca de P y que otro individuo B si la tiene. A quiere conocer la situación de P por lo que decide preguntarle a B. El modelo que usaremos consiste de dos mundos, uno en el cual P es verdad y otro en el cual P no es verdad. Como A no sabe cual es el correcto se imagina cualquiera de las dos posibilidades (cosa que representamos con la relación de accesibilidad). B sí sabe y por lo tanto no puede imaginar otro mundo más que el dado. Aquí esta su representación diagramática:

$$\cdot\ Pw_1 \xleftrightarrow{\quad A \quad} w_2\neg P\ \cdot$$

En el mundo w_1 podemos ver que $w_1 \vDash_{LE} \neg K_A P \wedge \neg K_A \neg P$ es decir, A no sabe si P es cierto o no. Tambien se satisfacen $K_B P, K_B(\neg K_A P \wedge \neg K_A \neg P), \neg K_A \neg(K_B P \vee K_B \neg P), K_A(K_B P \vee K_B \neg P)$ es decir B sabe P, B sabe que A no sabe si P es cierto o no, A no sabe que B no sabe si P es cierto o falso (en otras palabras A podría creer que B podría saber si P es cierto o falso), de hecho A sabe que B sabe si P es cierto o no. Toda está información está constantemente transferida en una interaccion social pero no es notado ya que es parte del sentido común. Cuando el personaje B responde que P entonces nuestro modelo colapsa a un solo punto en el cual P es verdadero y hay información completa.

Un resultado interesante, y de interpretación curiosa, es que la complejidad computacional del problema de saber si una fórmula es válida o no en la lógica epistemica depende del número de agentes involucrados en la interacción. Si hay un solo individuo el problema es NP, pero si hay dos o más agentes la complejidad brinca a PSPACE-completo. Una intepretación muy laxa es que la vida social y todos sus problemas, que incluyen saber lo que otros saben a cerca de lo que tu sabes para tomar decisiones, es esencialmente más compleja que la vida solitaria.

Para leer más de lógica epistemica consultar [25].

3.6.2. *Lógica Dinámica.* A partir de los setentas (aproximadamente) la lógica modal recibio un impulso enérgico por parte de los computólogos. Descubrieron en este lenguaje una oportunidad de modelar los procesos que se llevan a cabo en un programa computacional. Posterior a su creación, los filósofos y los matemáticos vieron en la lógica dinamica un modelo de cualquier proceso dinámico basado en una serie de acciones básicas. El modelo que idearon es sencillo y será presentado en está sección.

Estamos ahora frente a la colección de los estados posibles de una computadora, o el mundo, o cualquier escenario en el cual se vaya a realizar una acción. Tenemos una colección de acciones posibles que conectan los distintos estados en relaciones binarias. Como ejemplo podriamos tomar como escenario una cuadrícula rectangular en el cual el estado del mundo es la posición en la que me encuentro y las acciones posibles es moverse a la derecha, a la izquierda, al frente o hacía atrás. Así la posición (m,n) está relacionada con la posición (m,n+1) a través de la acción moverse al frente. Formalmente comenzamos con un conjunto M y una familia de relaciones sobre M: $\{R_a | a \in A\}$.

A partir de estas acciones (o programas) podemos construir nuevas de manera recursiva. El lenguaje deberá contener símbolos que puedan hablar de acciones, así que para cada acción básica (i.e. cada relación R_a) añadimos una letra 'a'. Siempre que yo tenga dos acciones, digamos π_1 y π_2, puedo componerlas, o puedo hacer una o la otra (barajearlas), o repetir una acción una cantidad finita de veces, o ejecutar una acción mientras se cumpla cierta condición. Esto aparece en la computación como los programas WHILE ϕ DO π o IF ϕ THEN π_1 ELSE π_2.

Una vez que definimos las acciones posibles, podriamos decir 'ϕ fue el resultado de introducir ψ en el programa π', o en el caso de que el programa sea no determinista ' es posible que ϕ sea un resultado de introducir ψ en el programa π'.

El lenguaje es el siguiente:

$\mathscr{L} = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\} \cup \{(,), \langle, \rangle, ^*, ;, ?, \cup\} \cup \{a\}_{a\in A}$

Recursivamente definimos las acciones y las fórmulas:

Definición Las fórmulas atómicas son de la forma P_i y las acciones básicas son a. Sean α y β dos fórmulas, y π_1 y π_2 dos acciones, entonces los siguientes tambien son fórmulas:

- $(\alpha \rightarrow \beta)$
- $(\alpha \wedge \beta)$
- $(\alpha \vee \beta)$
- $(\neg\alpha)$
- $(\langle\pi_1\rangle\alpha)$

y acciones:

- $(\pi_1; \pi_2)$
- $(\pi_1 \cup \pi_2)$
- π_1^*
- $(\alpha)?$

Definición Un modelo para la lógica dinámica es una terna $(M, \{R_a \subset M \times M\}_{a\in A}, V)$ donde M es un conjunto $\{R_a \subset M \times M\}_{a\in A}$ es una familia de relaciones binarias, una para cada letra de acción básica del lenguaje, y V es una valuacion de verdad, esto es una función $V : \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \times M \rightarrow 0, 1$.

Ahora la semántica formal:

Definición Sea $(M, \{R_a \subset M \times M\}_{a\in A}, V)$ un modelo y $w_1, w_2 \in M$. $w_1 \vDash \alpha$ significa que la fórmula α es verdadera en el estado w_1 , y $(w_1, w_2) \vDash \pi_1$ significa que la transición del estado w_1 al estado w_2 corresponde a una ejecución existosa de la acción π_1. Definimos recursivamente estas nociones:

- $w_1 \vDash P_i$ si $V(P_i, w_1) = 1$.
- $w_1 \vDash (\alpha \wedge \beta)$ si $w_1 \vDash \alpha$ y $w_1 \vDash \beta$.
- $w_1 \vDash (\alpha \vee \beta)$ si $w_1 \vDash \alpha$ o $w_1 \vDash \beta$.
- $w_1 \vDash (\alpha \to \beta)$ si $w_1 \nvDash \alpha$ o $w_1 \vDash \beta$.
- $w_1 \vDash (\neg\beta)$ si $w_1 \nvDash \beta$.
- $w_1 \vDash (\langle\pi\rangle\alpha)$ si existe un $w_3 \in M$ tal que $(w_1, w_3) \vDash \pi$ y $w_3 \vDash \alpha$.
- $(w_1, w_2) \vDash a$ si $(w_1, w_2) \in R_a$
- $(w_1, w_2) \vDash (\pi_1; \pi_2)$ si existe $w_3 \in M$ tal que $(w_1, w_3) \vDash \pi_1$ y $(w_3, w_2) \vDash \pi_2$.
- $(w_1, w_2) \vDash (\pi_1 \cup \pi_2)$ si $(w_1, w_2) \vDash \pi_1$ o $(w_1, w_2) \vDash \pi_2$.
- $(w_1, w_2) \vDash \pi_1^*$ si existe una sucesión finita $v_1, ..., v_n$ tal que $v_1 = w_1$, $v_n = w_2$ y para toda $i \in n$ se tiene que $(v_i, v_{i+1}) \vDash \pi_1$.
- $(w_1, w_2) \vDash (\alpha)?$ si $w_1 = w_2$ y $w_2 \vDash \alpha$.

Bajo está asignación de significado los programas IF ϕ DO π_1 ELSE π_2 y WHILE ϕ DO π se escriben $(((\phi)?; \pi_1) \cup ((\neg\phi)?; \pi_2))$ y $(((\phi)?, \pi)^*; (\neg\phi)?)$ respectivamente. Para leer más de lógica dinámica ver [14].

3.6.3. *Lógica Temporal.* La ultima lógica modal que presentaremos (aunque definitivamente no la ultima que existe, hay una inmensa variedad de lógicas modales) es la temporal, que se encarga de estudiar los modos temporales. Para hacer esto correctamente se agregan operadores al lenguaje que sirven para expresar las caracteristicas temporales de las proposiciones: la duración de una proposición, su posicion temporal etc.

La lógica temporal se utiliza mucho para analizar procesos en la ciencia de la computación o inteligencia artificial aunque surgió en un contexto filosófico. Las proposiciones que se estudian son del siguiente tipo:

(1) En el pasado siempre se ha dado ϕ. $H\phi$
(2) En el futuro siempre se dará ϕ. $G\phi$
(3) Se ha dado ϕ al menos una vez en el pasado. $P\phi$
(4) Se dará ϕ al menos una vez en el futuro. $F\phi$

De aquí ya es claro como vamos a definir la semántica para está lógica. Pero antes un comentario acerca de los modelos en los cuales se interpretara el lenguaje. El tiempo puede tener distintas formas: debe de ser un orden parcial, sin emabargo la totalidad de su ordenamiento es quiza un propiedad que emerge de nuestra percepcion de un camino único. Sin embargo podemos exigir que el tiempo se interprete como un orden total y se pueden añadir diversas caracteristicas al gusto del estudio: densidad, completud, no acotado, buena ordenación etc. Un modelo es entonces $(M, \leq, V)$ un conjunto M junto con un orden parcial $\leq$ donde las letras proposicionales tienen asignado un valor de verdad a través de una función veritativa $V : \{P_i\}_{i \in \mathbb{N}} \times M \to \{0, 1\}$.

Definición Se dice que un modelo $(M, \leq, V)$ satisface una fórmula ϕ en el mundo $w \in M$ y se escribe $w \vDash \phi$ si:

(1) $\phi = P_i$ y $V(P_i, w) = 1$.
(2) $\phi = (\psi \to \chi)$ y $w \vDash \chi$ o $w \nvDash \psi$.
(3) $\phi = (\neg\psi)$ y $w \nvDash \psi$.
(4) $\phi = P\phi$ si existe $w' \in M$ tal que $w' \lneq w$ y $w' \vDash \phi$.
(5) $\phi = F\phi$ si existe $w' \in M$ tal que $w \lneq w'$ y $w' \vDash \phi$.

$H\phi$ y $G\phi$ pueden definirse como $\neg P \neg\phi$ y $\neg F \neg\phi$ respectivamente.

Digamos que estamos diseñando un programa para controlar un dispositivo. Cada vez que se introduzca información al dispositivo el programa lo procesa y actúa de acuerdo a este estímulo. Este juego define un árbol de posibles desarrollos temporales en lo cuales están presentes todas los posibles resultados del programa. Al programador le interesaran ciertas propiedades de su programa. Por ejemplo un sistema inteligente para controlar la red de semáforos del DF. Nos gustaría que bajo ninguna circunstancia dos semáforos de una misma esquina sean verdes al mismo tiempo lo cual lo podemos escribir con esta lógica de la siguiente manera:

$\neg F(\psi_1 \wedge \psi_2)$ en donde ψ_1 es una fórmula que dice que le semáforo 1 está en verde y ψ_2 lo mismo para el semáforo 2. Además el semáforo 1 y el 2 están en la misma esquina.

¿Existe un método algoritmico para saber si una fórmula temporal es satisfecha en el ese modelo o no? sí, pero con un costo altísimo de recursos temporales: la complejidad del lenguaje de las fórmulas satisfacibles es EXPTIME-completo.

Para leer más de lógica temporal ver [6].

4. Lógica Multi-Valuada

El concepto de verdad está basado en asignaciones de verdad a las letras proposicionales, esto es funciones $V : \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to \{0,1\}$. Luego, la manera de extender los valores de verdad a todas las fórmulas es a través de las operaciones booleanas en $\{0,1\}$ Qué pasa si cambiamos el codominio de las asignaciones de verdad? Es natural aceptar como codominio a un álgebra booleana cualquiera.

Definición Sea A una álgebra booleana. Una A-Asignación es una función $V : \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to A$.

Dada una A-asignación V podemos extenderla a las fórmulas:

Definición Sea V una A-asignación. Definimos $V^* : FRM_{CP} \to A$ como la única función tal que $V^*(P_i) = V(P_i)$ y si α y β son fórmulas entonces $V^*(\alpha \wedge \beta) = V^*(\alpha) \wedge V^*(\beta)$, $V^*(\alpha \vee \beta) = V^*(\alpha) \vee V^*(\beta)$ y $V^*(\neg\beta) = \neg V^*(\beta)$

Definición Una fórmula α es satisfecha por una A-asignación V si $V^*(\alpha) = 1$.

Un analisis semejante al de la lógica modal descubre que existe una correspondencia (un par de funtores) entre las fórmulas y las clases de algebras boolenas. Cuestiones como el poder expresivo del cálculo de proposiciones son pertinentes, sin embargo no seran tratadas aquí. Para más información en el asunto consultar [11].

4.1. **Las Tautologías.** Toda semántica define la clase de las fórmulas que son verdad bajo cualquier interpretación correcta; en el cálculo de proposiciones son las tautologías. Sin embargo no sabemos que tanto varía cuando aceptamos interpretaciones booleanas no binarias. El siguiente teorema dice que no hemos aadido nuevas verdades, solo hemos refinado nuestra capacidad para hablar de las fórmulas contingentes. Ademas la demostración es un buen pretexto para repasar conceptos importantes de las Algebras Booleanas.

Lemma 4.1. *Dada una A-Asginación V y U un ultrafiltro en A entonces existe una única $\{0,1\}$-asignación $K : \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to A$ tal que $K^* = p \circ V^*$ donde p es la proyección $p : A \to A/U \simeq \{0,1\}$.*

Proof. Sea U un ultrafiltro y $p : A \to A/U \simeq \{0,1\}$ la proyección. Definimos $K : \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ como $K(P_i) = p(V(P_i))$. Veamos que $K^* = p \circ V^*$. Por inducción sobre la fórmacion de fórmulas. Para las letras proposicionales: K se definio así. Supongamos que la propiedad es cierta para α y β, entonces $K^*(\alpha\wedge\beta) = K^*(\alpha)\wedge K^*(\beta) = pV^*(\alpha)\wedge pV^*(\beta) = pV^*(\alpha\wedge\beta)$ ya que p es un morfismo de álgebras y por la definición de V^*. Los demas casos son análogos. La unicidad se deja para ser demostrada por el lector. □

Teorema 4.2. *α es una tautología si y solo si para toda álgebra booleana A y toda A-Asignación V, $V^*(\alpha) = 1$.*

Proof. El regreso es inmediato ya que toda asignación de verdad clásica es una $\{0,1\}$-Asignación. Sea α una tautología y A una álgebra booleana. Tomemos V una A-Asignación y demostremos que $V^*(\alpha) = 1$. Supongamos que $V^*(\alpha) \neq 1$, entonces por el teorema del ultrafiltro existe un ultrafilto U que no contiene a $V^*(\alpha)$ y sea $p : A \to A/U \simeq \{0,1\}$ la proyección. Entonces existe una asignación de verdad K tal que $K^*(\alpha) = pV^*(\alpha)$. Ya que $V^*(\alpha) \notin U$ entonces $pV^*(\alpha) = 0$. Pero por otro lado como α es una tautología entonces debe darse que $K^*(\alpha) = 1$. □

El ultrafiltro es usado como un artificio para convertir lógicas multivaluadas en lógicas clásicas. Este artificio es de gran utilidad sobre todo en la construcción de nuevos modelos a partir de una cierta colección de modelos clásicos. Este es el método que nos ocupará la proxima sección.

4.2. **Ultraproducto.** Fijemos un tipo de semejanza ρ. Nos abastecemos de una familia de estructuras $\mathscr{F} = \{\mathfrak{A}_j = (A_j, I_j)\}_{j\in J}$ con $\mathfrak{A}_j \in V_\rho$ y el objetivo es generar otra estructura tipo ρ. La construcción es la siguiente:

- Sea $B = \Pi_{j\in J}A_j$ el conjunto de J-adas de elementos de A_j, $\Pi_{j\in J}A_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in I} A_j | f(j) \in A_j\}$
- Sobre B construimos una interpretación del lenguaje:
  (1) Si R es una letra relacional de aridad n de ρ entonces $R^B = \Pi_{j\in J}R^{\mathfrak{A}_j} = \{(f_1, f_2, ..., f_n) \in (\Pi_{j\in J}A_j)^n | (f_1(j), f_2(j), ..., f_n(j)) \in R^{\mathfrak{A}_j}\}$
  (2) Si F es una letra funcional de aridad n de ρ entonces $(F^B(f_1, f_2, ..., f_n))(j) = F^{\mathfrak{A}_j}(f_1(j), f_2(j), .., f_n(j))$
  (3) Si e es una constante de ρ entonces $(e^B)(j) = e^{\mathfrak{A}_j}$
- Hemos construido una estructura clásica, sin embargo es demasiado restrictivo exigir la satisfacción de una fórmula en todos los mundos para la satisfacibilidad de ella en B. Así que demos otra modo de interpretar el lenguaje.
- Tomemos una fórmula α, en vez de interpretarla en B según Tarski, le daremos un valor de verdad en el álgebra booleana $\wp(J)$. Sea $s \in^\omega B$, definimos $V_s : FRM_\rho \to \wp(J)$ como $V_s(\alpha) = \{j \in J | \mathfrak{A}_j \vDash \alpha[s_j]$[18]$\}$.
- Sea U un ultrafiltro en $\wp(J)$ y $p : \wp(J) \to \wp(j)/U \simeq \{0,1\}$ la proyección. Dada una asignación $s \in^\omega B$ y una fórmula α, definimos el valor de verdad de esa fórmula como $Ver_s^U(\alpha) = pV_s(\alpha)$.
- Sean τ_1 y τ_2 dos términos y $s \in^\omega B$ una asignación. Supongamos que $Ver_s^U(\tau_1 = \tau_2) = 1$, lo cual significa que $\{j \in J | \tau_1^{\mathfrak{A}_j}[s_j] = \tau_2^{\mathfrak{A}_j}[s_j]\} \in U$. Luego, dos términos pueden ser distintos al ser interpretados en B, pero el valor de verdad puede ser 1. Esta situación no es deseable, por lo que debemos de arreglar el universo B para que la verdad de una fórmula

[18] s_j es la asignación $s_j : \omega \to A_j$ tal que $s_j(n) = (s(n))(j)$.

de igualdad implique igualdad de la intepretacion de los términos en el universo.

- Definimos una relación de equivalencia sobre los elementos de B. Decimos que dos J-adas f y g son equivalentes, y se escribe $f \sim_U g$, si $\{j \in J | f(j) = g(j)\} \in U$. Bajo está relación de equivalencia, $Val_s(\tau_1 = \tau_2) = 1$ si y solo si $\tau_1^B[s] \sim_U \tau_2^B[S]$, por lo que al cocientar hemos cumplido el objetivo. Sea $A = B/\sim_u$.
- Tenemos que definir nuevas interpretaciones para las letras de nuestro tipo de semejanza sobre A.
  (1) Si R es una letra relacional de aridad n entonces R^A es la relación n-aria sobre A tal que $([f_1],[f_2],...,[f_n]) \in R^a$ si y solo si $\{j \in J | (f_1(j),...,f_n(j)) \in R^{\mathfrak{A}_j}\} \in U$
  (2) Si F es una letra funcional de aridad n entonces $F^A([f_1],...,[f_n]) = [F^B(f_1,...,f_n))]$.
  (3) Si e es una constante entonces $e^A = [e^B]$.

  Es necesario comprobar que están bien hechas nuestras definiciones, esto es que el valor de una función o la pertenencia a una relación no depende de los representantes elegidos (Ejercicio).
- A la estructura construida (A,I) se le llama el ultraproducto de $\{\mathfrak{A}_j\}_{j\in J}$ y se denota por $\Pi\mathfrak{A}_j/U$.

La pregunta ahora es que tanto se parecen los valores de verdad de una fórmula bajo la interpretación de Tarksi y bajo la Asignación Val_s. El siguiente teorema, llamado el teorema fundamental del ultraproducto, nos muestra que la construcción fue exitosa.

Teorema 4.3 (Łoś). *Dada una asignación $s \in^\omega A$, α una fórmula y un ultrafiltro $U \subset \wp(J)$ se tiene que:*

$$\Pi\mathfrak{A}_j/U \models \alpha[s^*]^{19} \text{ si y solo si } Ver_s^U(\alpha) = 1$$

4.3. **La Expresividad de la Lógica de Primer Orden.** Qué tanto podemos decir de las estructuras matemáticas con el lenguaje de primer orden es una de las preguntas más importantes de la lógica. Hechas para hablar de ellas con precisión, para establecer un método de verificación de verdad, la lógica de primer orden es para el matemático clásico su lengua madre. Sin embargo ciertas cosas se escapan de la precisión absoluta de la lógica de primer orden, como si el confinamiento de los conceptos matemáticos bajo una estructura gramatical no ambigua no pudiera contener todo lo que hay por saber. La intuición o el poder imaginativo es mucho más grande.

Formalmente, hay ciertas propiedades de las estructuras matemáticas que no pueden ser caracterizadas por fórmulas de primer orden. Tomemos como ejemplo (bastante drástico) la propiedad de ser finito.

Sería deseable encontrar una fórmula σ cerrada tal que todo modelo que la satisfaga sea finito. Supongamos que tal fórmula existe y consideremos las fórmulas:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge ... \wedge x_2 \neq x_3 \wedge ... \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$$

Al ser satisfechas en un modelo, estas fórmulas nos garantizan la existencia de n elementos distintos. Sea $\mathscr{F}$ una cantidad numerable de modelos finitos $\mathscr{F} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $Card(||\mathfrak{A}_n||) = n$ y U el ultrafiltro cofinito $U = \{A \subset \mathbb{N} | \mathbb{N} - A$

[19] s^* denota la asignación $s^*(n) = [s(n)]$.

es finito } en $\mathbb{N}$. Posterior a la construcción del ultraproducto $\Pi\mathfrak{A}_n/U$ observamos dos cosas:

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Pi\mathfrak{A}_n/U \vDash \exists^{\geq n}$, puesto que para todo $m \geq n$, $\mathfrak{A}_m \vDash \exists^{\geq n}$ y $\{m \in \mathbb{N} | m \geq n\} \in U$.
(2) $\Pi\mathfrak{A}_n/U \vDash \sigma$ ya que $\mathfrak{A}_m \vDash \sigma$ para todo m y $\mathbb{N} \in U$.

Del punto (1) se desprende la conclusión de que $\Pi\mathfrak{A}_n/U$ no es finito, de (2) que si lo es. Por lo tanto la finitud no puede ser expresada con una sola fórmula, de hecho ni siquiera con un conjunto de fórmulas σ.

Para leer más de este tema referirse a [16] o [19].

5. Epílogo

La lógica es una disciplina que se desarrolla en una inmensidad de direcciones, incluso enumerarlas todas sería tarea de dementes. Sin embargo de una revision superficial de algunas de ellas podemos extraer información valiosa. En primer lugar que la lógica es una herramienta fundamental para el analisis riguroso de cualquier problema; que si hay un terreno desconocido, la lógica puede establecer un orden dentro de él construyendo modelos lógicos ad hoc. Segundo, y muy relacionado con el primer punto, es que cualquier situación ña (o quiza solo distinta) nos confronta con una red de referentes que difieren del escenario clásico y a la cual hay que adaptarse con mejores representaciones mentales de la situación, en otras palabras hemos de desarrollar una intuicion para incluso poder empezar a comprender. Una nueva intuicion (o asignación de significado a nuestros constructos mentales) conlleva una nueva lógica, en donde por lógica quiero decir estructuramiento del lenguaje por medio de una relación de consecuencia lógica. Así cualquier exploracion de un campo nuevo provoca el nacimiento de una lógica distinta, y es la obligación y el gusto del lógico explorarla.

Otro punto que habría que resaltar es la semejanza de analisis en las diversas lógicas. Pero la explicación es sencilla: hay ciertas categorías (no en el sentido matemático, o quien sabe) de un lenguaje matemático que son importantes para establecer su terreno y su potencial. Tres ejemplos dan las notas: el caso de la expresividad de un lenguaje, la íntima relación que posee una lógica con sus modelos; la algebraización, que uno podría pensar (o quiza solo me gustaría pensarlo) como la investigación del poder de cálculo que tiene una lógica; la computabilidad, la complejidad algorítmica de ese modo de pensamiento.

Finalmente, me gustaría decir que a la investigación lógica siempre puede sumarsele las grandes herramientas desarrolladas por la matemática moderna (como las categorías y topología) lo cual, además de brindarnos diferentes visiones profundas de la materia, hace de su quehacer una actividad más enriquecedora.

References

[1] S. Arora and B. Barak. *Computational complexity: a modern approach*, volume 1. Cambridge University Press, 2009.
[2] J. Bell and A. Slomson. *Models and ultraproducts: An introduction.* North-Holland, 1969.
[3] N. Bezhanishvili and D. de Jongh. *Intuitionistic logic.* Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam, 2006.
[4] L. Brouwer, A. Heyting, and H. Freudenthal. *Collected works.* North-Holland Amsterdam, 1975.

[5] B. Chellas. *Modal logic: an introduction*, volume 316. Cambridge Univ Press, 1980.
[6] E. Emerson. Temporal and modal logic. *Handbook of theoretical computer science*, 2:995–1072, 1990.
[7] H. Enderton. *A mathematical introduction to logic*, volume 2. Academic press New York, 1972.
[8] D. Gabbay and F. Guenthner. *Handbook of philosophical logic*, volume 4. Springer, 2001.
[9] J. Garson. *Modal logic for philosophers*. Cambridge Univ Pr, 2006.
[10] G. Gentzen. Investigations into logical deduction. *American philosophical quarterly*, 1(4):288–306, 1964.
[11] S. Gottwald. Many-valued logics. *Entry in the Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2004.
[12] G. Grätzer. *Universal algebra*. Springer Verlag, 2008.
[13] P. Halmos. *Lectures on Boolean algebras*. Springer, 1974.
[14] D. Harel, D. Kozen, and J. Tiuryn. *Dynamic logic*. The MIT Press, 2000.
[15] A. Heyting, S. in logic, and the foundations of mathematics. *Intuitionism: an introduction*, volume 3. North-Holland Amsterdam, 1971.
[16] W. Hodges. *Model theory*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1993.
[17] S. Kripke. Semantical analysis of intuitionistic logic i. *Formal systems and recursive functions*, pages 92–130, 1965.
[18] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer verlag, 1998.
[19] D. Marker. *Model theory: an introduction*. Springer Verlag, 2002.
[20] E. Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. Chapman & Hall/CRC, 1997.
[21] G. Mints. *A short introduction to intuitionistic logic*. Springer, 2000.
[22] C. Papadimitriou. *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd., 2003.
[23] J. Van Benthem. Modal logic for open minds. 2010.
[24] D. Van Dalen. Intuitionistic logic. *Handbook of philosophical logic*, 5:1–114, 2002.
[25] H. Van Ditmarsch, W. Van Der Hoek, and B. Kooi. *Dynamic epistemic logic*, volume 337. Springer Verlag, 2007.