

# Sistemas Formales

## INTRODUCCION

El objetivo de estas notas es organizar y definir, en la forma más rigurosa posible, los conceptos básicos de la lógica matemática clásica.

Esto está motivado por el hecho de que en los textos usuales de lógica ocurre que no se da una exposición clara y organizada de estos conceptos y que, de entre estos, hay algunos cuya definición varía de texto a texto.

Así pues, no se intenta dar una definición más de cada uno de los conceptos básicos, sino más bien dar una que los abarque, los englobe, o mejor dicho, los unifique. Y por supuesto, organizada de una forma, pensamos, más coherente.

Estas notas están diseñadas como material de apoyo a un primer o segundo curso de lógica matemática.

Presuponemos que el lector está familiarizado con los conceptos de lenguaje y met-lenguaje, sintaxis y semántica, y para las últimas dos secciones, con lógica de proposiciones y lógica de predicados.

## 1 LENGUAJES FORMALES.

### 1.1 DEFINICION Y NOTACION

Sea  $S$  un conjunto, no-vacío. A los elementos de  $S$  les llamamos símbolos de  $S$ . Diremos que una sucesión finita de símbolos de  $S$ , forma una expresión de  $S$ . Al conjunto de expresiones de  $S$  lo denotaremos por  $\mathbb{E}_S$

### 1.2 DEFINICION Y NOTACION

Sea  $S$  un conjunto de Símbolos y  $\phi \subseteq \mathbb{E}_S$ , no-vacío. Por un *Lenguaje Formal* (L.F.),  $L$ , entenderemos a la pareja ordenada

$$L = \langle S, \phi \rangle$$

A  $S$  se le llamará el *alfabeto* de  $L$ , y a  $\phi$  el *conjunto de fórmulas bien formadas* (f.b.f) de  $L$ .

Por lo general para construir a  $\phi$  a partir de  $\mathbb{E}_S$ , se dan una serie de reglas, llamadas *Reglas de formación de las f.b.f. de  $L$* , y que proporcionan un mecanismo efectivo para decidir si una expresión dada pertenece o no a  $\phi$ .

Algunos ejemplos de L.F. son:

**E.1.1.**  $L_1 = \langle S_1, \phi_1 \rangle$ ; donde  $S_1 = \{a, b\}$  y

$$\phi_1 = \{x \in \mathbb{E}_{S_1} \mid \text{long}^1(x) \leq 4\}.$$

**E.1.2.**  $L_2 = \langle S_2, \phi_2 \rangle$ ; donde  $S_2 = \{a, b\}$  y

$$\phi_2 = \{x \in \mathbb{E}_{S_2} \mid x \text{ empieza con "a" y termina con "b"}\}.$$

**E.1.3.**  $L_3 = \langle S_3, \phi_3 \rangle$ ; donde  $S_3 = \{a, b, o\}$  y

$$\phi_3 = \{x \in \mathbb{E}_{S_3} \mid x \text{ empieza con "a"}\}.$$

**E.1.4.**  $L_4 = \langle S_4, \phi_4 \rangle$ ; donde  $S_4 = \{a, b, o, *\}$  y

$$\phi_4 = \{x \in \mathbb{E}_{S_4} \mid x \text{ empieza con "a"}\}.$$

**E.1.5.**  $L_5 = \langle S_5, \phi_5 \rangle$ ; donde  $S_5 = S_4$  y

$$\phi_5 = \{x \in \mathbb{E}_{S_5} \mid x \text{ empieza con "a" y no contiene a "*"}\}.$$

Los ejemplos E.1.1. y E.1.2. nos muestran dos lenguajes que, a pesar de tener el mismo alfabeto son distintos, y los ejemplos E.1.3. y E.1.5. muestran lenguajes distintos, a pesar de tener el mismo conjunto de f.b.f.

### 1.3 DEFINICION Y NOTACION

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos L.F. Decimos que  $L_1$  es un *sublenguaje* de  $L_2$ , notación:  $L_1 < L_2$ , sí y sólo si:

1. El alfabeto de  $L_1$  está contenido en el de  $L_2$ ; y
2. El conjunto de f.b.f. de  $L_1$  son todas aquellas f.b.f. de  $L_2$  que sólo contienen símbolos de  $L_1$ .

Notemos que, de la definición anterior, al dar un subconjunto de símbolos de un L.F., el sublenguaje queda perfectamente determinado.

Como ejemplo de un sublenguaje tenemos que  $L_3 < L_4$ . En cambio  $L_2 \not< L_3$ , ya que, por ejemplo "a" es una f.b.f. de  $L_3$ , que debe de pertenecer al sublenguaje, de  $L_3$ , con alfabeto  $\{a, b\}$ , y no pertenece a  $\phi_2$ .

---

<sup>1</sup>Por  $\text{long}(x)$  (longitud de  $x$ ) entendemos el número de símbolos que aparecen en la expresión " $x$ "

## 2 SISTEMAS FORMALES.

Antes de definir rigurosamente lo que es un Sistema Formal (S.F.), necesitaremos formalizar el concepto de Regla de Inferencia.

### 2.1 DEFINICION

Sea  $L = \langle S, \phi \rangle$  un L.F. Por una Regla de Inferencia  $R^n$  de aridad  $n$  (con  $n \geq 2$ ), en  $L$ , entenderemos un subconjunto del producto cartesiano  $\phi^n$ , de tal suerte que para todo conjunto de  $(n-1)$  f.b.f. y cada fórmula  $A$ , se pueda decidir efectivamente si las  $(n-1)$  f.b.f. junto con  $A$  están en la relación  $R^n$ . En tal caso diremos que  $A$  es consecuencia directa de las  $(n-1)$  f.b.f. en virtud de la regla  $R^n$ .

Algunos ejemplos de Reglas de Inferencia son:

**E.2.1.**  $R_1^3 = \{(A, B, AB) | A, B \in \phi_1 \text{ y } \text{long}(A) + \text{long}(B) \leq 4\}$  es una Regla de Inferencia de aridad 3, para  $L_1$ .

**E.2.2.**  $R_2^2 = \{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1) | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in S_1\}$  es una Regla de Inferencia de aridad 2 para  $L_1$ .

**E.2.3.**  $R_3^3 = \{(A, B, AoB) | A, B \in \phi_4\}$ . Es Regla de Inferencia de aridad 3, para  $L_3$  y  $L_4$ .

**E.2.4.**  $R_3^3 = \{(AoB, B, A) | A, B \in \phi_4\}$ . Es Regla de Inferencia de aridad 3, para  $L_3$  y  $L_4$ .

Si  $R^n$  es una Regla de inferencia de aridad  $n$ , y  $A$  es consecuencia directa de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  en virtud de dicha regla, es costumbre escribir:

$$R^n : \frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{A}$$

Así en los ejemplos anteriores, tenemos:

$$\begin{array}{ll} R_1^3 : \frac{A, B}{AB} & R_2^2 : \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1} \\ R_3^3 : \frac{A, B}{AoB} & R_4^3 : \frac{AoB, B}{A} \end{array}$$

Con esto podemos pasar a definir lo que se entiende por un Sistema Formal.

### 2.2 DEFINICION Y NOTACION

Sea  $L = \langle S, \phi \rangle$  un L.F. y sea  $\{R_i\}_{i \in I}$  un paquete, no-vacío, de Reglas de Inferencia en  $L$ . Por un *Sistema Formal S.F.L.*, con lenguaje  $L$ , enteremos a la pareja ordenada:

$$SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i \in I} \rangle.$$

En la definición anterior, generalmente  $I \subset \mathbb{N}$ .

Ejemplos de S.F. son:

**E.2.5.**  $F_1 = \langle L_1, \{R_1^3\} \rangle$ .

**E.2.6.**  $F_2 = \langle L_1, \{R_2^2\} \rangle$ .

**E.2.7.**  $F_3 = \langle L_1, \{R_1^3, R_2^2\} \rangle$ .

**E.2.8.**  $F_4 = \langle L_3, \{R_3^3\} \rangle$ .

**E.2.9.**  $F_5 = \langle L_3, \{R_4^3\} \rangle$ .

Pasemos ahora a definir algunos conceptos íntimamente relacionados con los S.F.

De ahora en adelante, si no se especifica otra cosa, cuando hablemos de un lenguaje, entenderemos lenguaje formal  $L = \langle S, \phi \rangle$ , y cuando hablemos de un sistema  $SF_L$ , entenderemos sistema formal  $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$ .

### 2.3 DEFINICION Y NOTACION.

Sean  $\Delta \subseteq \phi$  y  $A \in \phi$ . Se dice que A es *consecuencia o deducción de  $\Delta$  en  $SF_L$*  sí y sólo si existe una sucesión finita  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de f.b.f. de L tal que:

1.  $A_n = A$
2. Para cada j, o  $A_j$  es un elemento de  $\Delta$  o  $A_j$  es consecuencia directa de alguna o algunas de las f.b.f anteriores de la sucesión, en virtud de alguna de las Reglas de Inferencia del  $SF_L$ .

La notación usual es:

$$\Delta \vdash_{SF_L} A$$

Si este es el caso, se dirá que la sucesión  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es *una deducción* de A a partir de  $\Delta$ , en  $SF_L$  y a los elementos de  $\Delta$  les llamaremos *Hipótesis o Premisas*.

Es costumbre, al dar una lista de una deducción poner delante de cada una de las f.b.f la justificación de su inclusión en dicha lista.

Veamos un par de ejemplos.

**E.2.10.** Considere el SF,  $F_3 = \langle L_1, \{R_1^3, R_2^2\} \rangle$  y sea  $\Delta = \{a, ab\}$ , entonces

1. (a)  $a$   $\in \Delta$   
(b)  $ab$   $\in \Delta$   
(c)  $aab$   $R_1^3$  a 1,2  
 $\therefore \Delta \vdash_{SF_L} aab$
2. (a) 1.  $a$   $\in \Delta$   
(b) 2.  $aa$   $R_1^3$  a 1,1

(c) 3. $aaaa$	$R_1^3$ a 2,2
$\therefore \Delta \vdash_{SF_L} aaaa$	
3. (a) 1. $ab$	$\in \Delta$
(b) 2. $abab$	$R_1^3$ a 1,1
(c) 3. $baba$	$R_2^2$ a 2
$\therefore \Delta \vdash_{SF_L} baba$	
4. (a) 1. $a$	$\in \Delta$
(b) 2. $ab$	$\in \Delta$
(c) 3. $aab$	$R_1^3$ a 1,2
(d) 4. $aaab$	$R_1^3$ a 1,3
(e) 5. $baaa$	$R_1^2$ a 4
$\therefore \Delta \vdash_{SF_L} baaa$	

**E.2.11.** Considere el SF,  $F_4 = \langle L_3, \{R_3^3\} \rangle$  y sea  $\Delta = \{f \in \phi_3 \mid f \text{ no tiene ocurrencias de "o"}\}$ . Es claro que:  $\Delta \vdash_{SF_L} A$  sí y sólo si en A después de cada "o" ocurre una "a".

Veamos algunas propiedades que son ciertas para cualquier S.F.

## 2.4 PROPOSICION

Sea  $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$  un S.F. y sean  $\Gamma, \Delta \subseteq \phi$ , y  $A, B \in \phi$  entonces:

1. para toda  $C \in \Gamma$ ,  $\Gamma \vdash_{SF_L} C$ .
2. si  $\Gamma \subseteq \Delta$  y  $\Gamma \vdash_{SF_L} A$ , entonces  $\Delta \vdash_{SF_L} A$ .
3. si  $\Gamma \vdash_{SF_L} A$  y  $A \vdash_{SF_L} B$ , entonces  $\Gamma \vdash_{SF_L} B$ .
4. si para cada  $B_i \in \Delta$ , se tiene que  $\Gamma \vdash_{SF_L} B_i$  y  $\Delta \vdash_{SF_L} A$ , entonces  $\Gamma \vdash_{SF_L} A$ .
5. (Metateorema de Finitud)  $\Delta \vdash_{SF_L} A$  sí y sólo si existe un subconjunto finito  $\Gamma$  de  $\Delta$  tal que  $\Gamma \vdash_{SF_L} A$ .

Las demostraciones son sencillas y se dejan al lector.

## 2.5 DEFINICION Y NOTACION

Considérese a  $SF_L$ . Sea  $\Gamma \subseteq \phi$ , por la *cerradura deductiva* de  $\Gamma$ , denotada por  $\bar{\Gamma}$ , entenderemos al conjunto de todas las f.b.f. que se deducen a partir de  $\Gamma$  en  $SF_L$ . En

símbolos

$$\bar{\Gamma} = \{f \in \phi \mid \Gamma \vdash_{SF_L} f\}$$

Algunos ejemplos son:

**E.2.12.** En el S.F. :  $F_1 = \langle L_1, \{R_1^3\} \rangle$  se tiene que:

1. Si  $\Gamma = \{a\}$ , entonces  $\bar{\Gamma} = \{a, aa, aaa, aaaa\}$
2. Si  $\Gamma = \{ab\}$  entonces  $\bar{\Gamma} = \{ab, abab\}$ .

**E.2.13.** En el S.F. :  $F_2 = \langle L_1, \{R_2^2\} \rangle$  se tiene que:

1. la cerradura deductiva de cualquier conjunto de f.b.f., cuyos elementos tengan longitud a lo más tres, coincide consigo mismo.
2. la cerradura deductiva de cualquier conjunto de f.b.f., que contenga fórmulas de longitud cuatro, será igual al conjunto, unión con el conjunto de todas las fórmulas "simétricas" de longitud cuatro; así, por ejemplo, si  $\Gamma = \{a, ab, baba, aabb, bbaa\}$  entonces  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{abab, bbaa, aabb\}$ .

**E.2.14.** El ejemplo E.2.11. da una caracterización del conjunto  $\bar{\Delta}$ .

El ejemplo E.2.13. a) nos muestra que existen conjuntos tales que coinciden con su cerradura deductiva<sup>2</sup>, se dice que estos conjuntos son *conjuntos deductivamente cerrados* o que son *cerrados bajo la deducción*. Esta propiedad nos servirá para definir uno de los conceptos mas importantes para los S.F.

## 2.6 DEFINICION

Considérese  $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$  y sea  $T \subseteq \phi$ , se dice que T es una *Teoría Formal* en  $SF_L$ , sí y sólo si T es un conjunto deductivamente cerrado, e.d.,  $\bar{T} = T$ . A los elementos de T se les llamará *Teoremas formales* de T.

Es claro que el ejemplo E.2.13 a) nos proporciona varias teorías para el sistema  $F_2$ . Otros ejemplos son:

**E.2.15** . En  $F_1 = \langle L_1, \{R_1^3\} \rangle$

1.  $T = \{b, bb, bbb, bbbb\}$  es una teoría.
2. Cualquier conjunto cuyos elementos tengan longitud exactamente cuatro, es una teoría.

**E.2.16.** En  $F_2 = \langle L_1, \{R_2^2\} \rangle$ . Cualquier conjunto de f.b.f. tal que si contiene elementos de longitud cuatro, también contiene a los simétricos, será una teoría.

Algunas de las principales propiedades de las teorías formales nos da la siguiente

---

<sup>2</sup>Es claro que todo  $\Gamma \subseteq \phi$  en  $SF_L$  cumple  $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$ . El inverso no siempre es cierto

## 2.7 PROPOSICION

Considerando  $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$ , sean  $\Gamma, \Delta \subseteq \phi$  y  $A \in \phi$ , entonces:

1.  $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$
2.  $\overline{\phi} = \phi$ , por lo que  $\phi$  es una teoría formal.
3. Si  $\Gamma \subseteq \Delta$ , entonces  $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Delta}$
4.  $\overline{\Gamma \cup \Delta} \subseteq \overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta}$
5.  $\overline{\Gamma \cap \Delta} \subseteq \overline{\Gamma} \cap \overline{\Delta}$
6.  $\Gamma$  es una teoría formal sí y sólo si
$$\Gamma \vdash_{SF_L} A \Leftrightarrow A \in \Gamma$$

Las demostraciones son sencillas y se dejan al lector.

No es difícil ver que en una teoría no necesariamente se utilizan todos los símbolos del alfabeto del lenguaje, sino sólo un subconjunto muy específico de f.b.f. Muchas veces es necesario referirnos a dichas fórmulas y de aquí la necesidad para la siguiente definición.

## 2.8 DEFINICION Y NOTACION

Sea  $T$  una teoría formal en  $SF_L$  y sea  $R$  el mínimo conjunto de símbolos que intervienen en la teoría  $T$ . Por el *Lenguaje de la teoría  $T$* , denotado por  $L(T)$ , entenderemos al sublenguaje de  $L$  que tiene como conjunto de símbolos a  $R$ .

Recordemos que el conjunto de f.b.f. de un sublenguaje queda perfectamente determinado por el conjunto de símbolos.

Abusando de la notación, usaremos  $\psi \in L(T)$  para indicar que  $\psi$  es una f.b.f. del lenguaje de la teoría  $T$ .

Hay que hacer notar que dentro de  $L(T)$ , pueden haber (y de hecho, son las teorías interesantes) f.b.f. que no pertenecen a  $T$  como elementos.

Pasemos ahora a definir uno de los conceptos más allegados a las teorías formales.

## 2.9 DEFINICION

Sea  $T$  una teoría formal en  $SF_L$ . Se dice que es *Axiomatizable* sí y sólo si existe  $\Gamma \subseteq T$  tal que  $\overline{\Gamma} = T$ . Si tal es el caso, a  $\Gamma$  se le llamará *un conjunto de axiomas de  $T$* , y sus elementos, *axiomas de  $T$* .

Lo primero a mencionar, es que en una teoría formal axiomatizable, el conjunto de axiomas no necesariamente es único.

Por otro lado, no porque una teoría sea axiomatizable se podrá saber perfectamente cuales son sus axiomas, v.g. el conocimiento de la existencia de un conjunto de axiomas, no nos dice cuáles son sus elementos, y de aquí que:

## 2.10 DEFINICION

Si  $T$  es una teoría formal, en  $SF_L$ , axiomatizable y existe un procedimiento efectivo para decidir si una f.b.f. dada es axioma, se dirá que  $T$  es una *Teoría (formal) Axiomática*.

Cuando una teoría es axiomática todos sus teoremas se pueden obtener como deducciones, cuyas hipótesis o premisas son los axiomas: dichas deducciones recibirán un nombre especial.

## 2.11 DEFINICION

Sea  $T$  una teoría axiomática en  $SF_L$ . A una deducción (lista finita) a partir de los axiomas de  $T$ , le llamaremos *prueba formal*.

Con esto resulta que un teorema es la última f.b.f. de una demostración.

¿Un axioma es un teorema?

Cuando se trabaje en un solo sistema formal y con una teoría específica, cuyos axiomas sean conocidos, digamos  $\Gamma$ , escribiremos:  $\vdash_{\Gamma} A$ , o simplemente  $\vdash A$ , para indicar que  $A$  es un teorema de la teoría  $\Gamma$  en dicho sistema.

Esta notación es conveniente ya que podemos usar la simbología  $\Delta \vdash_{\Gamma} B$ , o simplemente  $\Delta \vdash B$  para indicar que existe una deducción de  $B$  a partir de  $\Gamma$  (como conjunto de axiomas) y de  $\Delta$  como conjunto de hipótesis adicionales (por supuesto  $\Delta \subseteq L(\overline{T})$ ).

Hasta ahora, para construir teorías formales, las cosas se han presentado "verticalmente", es decir, primero construimos un lenguaje formal, después un sistema formal y, finalmente, tomamos un conjunto deductivamente cerrado o, en el mejor de los casos, la cerradura deductiva de un conjunto de f.b.f. En realidad las cosas no suelen ser así, por el contrario, al principio lo que se tiene es un conjunto de f.b.f., las cuales queremos organizar en forma de una teoría (axiomática), entonces lo que procede es construir un lenguaje formal adecuado e inscribir esta "teoría" en un sistema formal, haciendo explícitas las reglas de inferencia.

Esto se hace en forma "vertical", para organizar sistemáticamente los conceptos más relevantes de la lógica matemática clásica, como ya lo hicimos notar en la introducción.



### 3 CONSISTENCIA, CORRECTEZ, COMPLETEZ E INDEPENDENCIA

Al intentar construir una Teoría Formal, como formalización de una teoría intuitiva, bastaría con que ésta fuera un conjunto deductivamente cerrado de f.b.f., pero la intención común es exigirle ciertas propiedades como son la consistencia y la correctez y desear otras como son la completez y la independencia de sus axiomas (ene el caso de que sea axiomática).

La propiedad de consistencia es la más importante para las teorías formales, ya que sin ellas no tiene sentido preguntarse sobre cualquier otra propiedad. Esto se hará evidente cuando demos una caracterización para un SF cuyo lenguaje (y reglas de inferencia adecuadas) contengan un símbolo para la negación ( $\neg$ ).

#### 3.1 DEFINICION

3

Sea T una teoría formal en  $SF_L$ . Se dice que T es una *Teoría consistente* sí y sólo si existe  $\psi \in L(T)$  tal que  $\psi \notin T$ , en otras palabras  $T \neq L(T)$ . En caso contrario, diremos que T es *inconsistente*.

En caso de que T sea axiomatizable, la definición anterior es equivalente a pedir que exista  $\psi \in L(T)$  tal que  $\Gamma \not\vdash \psi^4$ , con  $\Gamma$  un conjunto de axiomas para T.

Un ejemplo de una teoría consistente nos lo da E.2.11. (por ejemplo, "aob" es una f.b.f. tal que  $\Delta \not\vdash aob$ ).

Para enfatizar, diremos que, si una teoría fuera inconsistente, entonces toda f.b.f. sería un teorema formal.

Respecto a los métodos de demostración de la consistencia de una teoría formal T, diremos, aunque se sale de nuestros objetivos, que por lo general, las demostraciones de consistencia se hacen a nivel semántico, por ejemplo, dando un modelo<sup>5</sup> para la teoría T.

Si la teoría T es axiomática, existe un procedimiento interesante que consta de lo siguiente:

1. Encontrar una propiedad P relativa a f.b.f. de  $L(T)$ ; es decir, que pueda decidirse efectivamente para cada f.b.f. si tiene o no la propiedad.
2. La propiedad deberá ser tal que:

---

<sup>3</sup>Esta es una definición sintáctica de consistencia.

<sup>4</sup>Es claro que el símbolo  $\not\vdash$  significa que no se puede deducir.

<sup>5</sup>Aquí entenderemos por *modelo* de T, una interpretación de los símbolos de  $L(T)$ , en la cual los teoremas de T, se interpretan como "verdaderos".

- (a) Todos los axiomas tengan la propiedad P
- (b) Para cada regla de inferencia  $R_I^n$  del S.F. y cada f.b.f.  $A \in L(T)$  se cumpla que si A es consecuencia inmediata de (n-1) f.b.f. en virtud de  $R_I^n$  y las (n-1) f.b.f. tienen la propiedad P, entonces A tenga la propiedad P.
- (c) Exista una f.b.f. B, que no tenga la propiedad P. Si se cumple lo anterior, la f.b.f. B no será teorema formal (¿por qué?) y por lo tanto la teoría T será consistente.

A continuación definiremos los conceptos de Correctez y Completez; no daremos ahora la definición de Completez sintáctica, ya que ésta se da para teorías en un lenguaje con negación.

### 3.2 DEFINICION

Sea T una teoría formal en  $SF_L$ . Se dice que T es *correcta respecto a una propiedad P relativa a f.b.f.* sí y sólo si todo teorema de T tiene la propiedad P.

Si se está formalizando una teoría intuitiva, por lo general, la propiedad P respecto a la cual se pide correctez es la siguiente: una f.b.f. A tiene la propiedad P sí y sólo si “el enunciado cuya formalización es A, es verdadero en la teoría intuitiva”. Es claro que la correctez respecto a una propiedad como la anterior, es algo fundamental en la intención de formalizar una teoría intuitiva.

### 3.3 DEFINICION

Sea T una Teoría formal en  $SF_L$ . Se dice que T es *completa respecto a una propiedad P de f.b.f.* sí y sólo si toda f.b.f. de  $L(T)$  que tenga la propiedad P, es un teorema de T. Sea T una teoría y  $\phi = L(T)$ . Sea  $\mathbb{P} = \{x \in \phi \mid x \text{ tiene la propiedad P}\}$ , P una propiedad relativa a f.b.f.

Con los siguientes diagramas se esquematizan los conceptos de Correctez y Completez respecto a la propiedad P de f.b.f.:

Si T es una teoría correcta y completa respecto a una propiedad P, entonces  $\mathbb{P} = T$ .

El ejemplo E.2.11. nos da una teoría  $\bar{\Delta}$ , la cual es:

1. Correcta y completa respecto a la propiedad «tener “a” despues de cada “o”».
2. Correcta y no completa respecto a la propiedad «no tener “b” despues de “o”».
3. Completa y no correcta con respecto a la propiedad «tener “aa” despues de cada “o”».

Además de los ejemplos anteriores, existen ejemplos de teorías más interesantes como son:

El Cálculo de Proposiciones o Cálculo Sentencial (C.S.) es completo y correcto respecto a la propiedad de ser tautología y el Cálculo de Predicados (C.P.)<sup>6</sup> es completo y correcto respecto a la propiedad de ser universalmente válida.

El método más usual para probar la corrección de una teoría axiomática es probar que los axiomas tienen la propiedad y que las reglas de inferencia la preservan; esto está explicado en los pasos 1) y 2) a) b) del procedimiento de prueba de consistencia dado al principio de esta sección.

De lo anterior se desprende que si una teoría es correcta y completa respecto a alguna propiedad que no tengan todas las f.b.f. del lenguaje de la teoría, entonces la teoría es consistente.

Finalmente pasaremos a dar la definición formal de independencia de los axiomas, (en teorías axiomáticas).

### 3.4 DEFINICION

Sea  $T$  una Teoría formal axiomática en  $SF_L$ , sea  $\Gamma$  un conjunto de axiomas para  $T$  y  $\gamma \in \Gamma$ . Se dice que  $\gamma$  es un *axioma independiente de los demás* sí y sólo si

$$\Gamma - \{\gamma\} \not\vdash_{SF_L} \gamma$$

Además, si cada uno de los elementos de  $\Gamma$  es independiente de los demás, entonces diremos que  $\Gamma$  es un *conjunto de axiomas independientes para  $T$*  o simplemente que  $\Gamma$  es *independiente para  $T$* .

El siguiente resultado nos da algunas de las principales caracterizaciones de los axiomas independientes:

### 3.5 PROPOSICION

Sea  $T$  una teoría formal axiomática en  $SF_L$  y sea  $\Gamma$  un conjunto de axiomas para  $T$ . Las siguientes tres propiedades son equivalentes.

1.  $\Gamma$  es independiente para  $T$ .
2. Si  $\Delta \subseteq \Gamma$  y  $\overline{\Delta} = T$ , entonces  $\Delta = \Gamma$ .
3. si  $\Delta \subsetneq \Gamma$ , entonces  $\overline{\Delta} \subsetneq T$ .

La demostración es sencilla y se deja al lector.

---

<sup>6</sup>Estas teorías se formalizarán en las Secciones 4 y 5.

El mismo ejemplo E.2.11. nos da una teoría cuyos axiomas,  $\Delta$ , son independientes.

Para probar que un axioma, por ejemplo  $\gamma \in \Gamma$ , es independiente de los demás, existen dos métodos muy usuales: el primero consiste, al igual que con la correctez, en mostrar que  $\Gamma - \{\gamma\}$  tiene cierta propiedad que es preservada por las reglas de inferencia y que  $\gamma$  no goza de ella. La segunda consiste en dar un modelo para la teoría  $\overline{\Gamma - \{\gamma\}}$  en el cual no sea "verdadera"  $\gamma$ .

## 4 EL CALCULO DE PROPOSICIONES (C.S.).

En este apartado queremos dar un ejemplo específico de una Teoría Formal, una axiomatización para la lógica de Proposiciones, basadas en las ideas expresadas en las secciones anteriores y llamada Cálculo de Proposiciones.

### 4.1 DEFINICION Y NOTACION

Un lenguaje formal para el Cálculo de Proposiciones o Cálculo Sentencial, es  $L_{C.S.} = \langle S, \phi \rangle$  donde:

1. S es la unión de los siguientes conjuntos de símbolos:
  - (a) Un conjunto infinito de letras proposicionales:  $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$
  - (b) Un conjunto de conectivos:  $\{\rightarrow, \neg\}$
  - (c) Un conjunto de signos de puntuación:  $\{ \}, \{ \}$
2. El conjunto de f.b.f.,  $\phi$ , está dado por las siguientes reglas de formación:
  - (a) Toda letra proposicional,  $P_i$ , es una f.b.f.
  - (b) Si A y B son f.b.f., entonces  $(A \rightarrow B)$  y  $(\neg A)$  también son f.b.f.
  - (c) Una expresión de  $L_{CS}$  es una f.b.f. sólo si se puede mostrar que lo es repitiendo los pasos a) y b) un número finito de veces.

### 4.2 DEFINICION Y NOTACION

Un sistema formal para el lenguaje  $L_{CS}$ , es el sistema  $C.S. = \langle L_{CS}, MP \rangle$  donde MP es la única regla de inferencia, y trabaja así: si  $A, B \in \phi$ , entonces:

$$\text{MP} : \frac{A, (A \rightarrow B)}{B}$$

A la regla MP, se le llama *Modus Ponens*.

### 4.3 DEFINICION Y NOTACION

Por el *Cálculo de Proposiciones*  $\mathbb{CS}$ , entenderemos la teoría formal en C.S. que se obtiene al tomar la cerradura deductiva de la unión de los siguientes tres conjuntos  $Ax_1, Ax_2, Ax_3$ , de f.b.f. de  $L_{CS}$ :

$$Ax_1 = \{(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \mid A, B \in \phi\}$$

$$Ax_2 = \{((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \mid A, B, C \in \phi\}$$

y

$$Ax_3 = \{(((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow A)) \mid A, B \in \phi\}$$

en símbolos

$$CS = \overline{Ax_1 \cup Ax_2 \cup Ax_3}$$

Hay que notar que en este caso,  $L(\mathbb{CS}) = L_{CS}$ .

Antes de dar una caracterización de la consistencia para el C.S., probaremos una deducción. De aquí en adelante, no escribiremos algunos paréntesis, para simplificar la notación.

### 4.4 PROPOSICION

Si  $\varphi, \psi \in L_{CS}$ , entonces  $\{\neg\varphi, \varphi\} \vdash_{CS} \psi$ .

Prueba:

1. $\varphi$	hipótesis
2. $\neg\varphi$	hipótesis
3. $\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi)$	$\in Ax_1$
4. $\neg\psi \rightarrow \varphi$	MP(1,3)
5. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	$\in Ax_1$
6. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	MP(2,5)
7. $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi)$	$\in Ax_3$
8. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$	MP(4,7)
9. $\psi$	MP(8,6)

Con esto, el lector puede probar fácilmente, la siguiente

### 4.5 PROPOSICION

La teoría  $\mathbb{CS}$  es consistente sí y sólo si no existe  $\varphi \in L_{CS}$  tal que

$$\vdash_{CS} \varphi \text{ y } \vdash_{CS} \neg\varphi^7$$

Para la prueba de consistencia del CS se puede consultar [10] p.37 .

Como ya habíamos dicho, el C.S. es correcto y completo semánticamente respecto a las tautologías. Consultar [10] p.35 y p.37 .

Finalmente para la independencia de los 3 conjuntos de axiomas de CS también se puede consultar [10], pp.38 - 39.

Hacemos notar que se afirma la independencia de los axiomas de C.S. por conjuntos, o sea si  $\gamma \in Ax_1$  entonces  $Ax_2 \cup Ax_3 \not\vdash \gamma$ ; si  $\gamma \in Ax_2$  entonces  $Ax_1 \cup Ax_3 \not\vdash \gamma$ ; y por último, si  $\gamma \in Ax_3$  entonces  $Ax_1 \cup Ax_2 \not\vdash \gamma$ .

Sin embargo, si  $\gamma \in Ax_1$  entonces no se asegura que  $Ax_1 - \{\gamma\} \not\vdash \gamma$ , y para ello presentamos el siguiente contraejemplo:

Sea  $\gamma = (P_2 \rightarrow P_1) \rightarrow (P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1)) \in Ax_1$

1.  $(P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1)) \rightarrow ((P_2 \rightarrow P_1) \rightarrow (P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1))) \quad \in Ax_1 - \{\gamma\}$
2.  $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1) \quad \in Ax_1 - \{\gamma\}$
3.  $(P_2 \rightarrow P_1) \rightarrow (P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1)) \quad \text{MP}(1,2)$

Por lo tanto se tiene:  $\in Ax_1 - \{\gamma\} \vdash \gamma$  o sea, que el axioma  $\gamma = (P_2 \rightarrow P_1) \rightarrow (P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_1))$  no es independiente de los demás; aunque sí se prueba su independencia de los demás axiomas de  $Ax_2$  y  $Ax_3$ .

En resumen, los axiomas de C.S. son independientes por conjuntos o “por bloques”, pero no individualmente.

## 5 SISTEMAS FORMALES DE PRIMER ORDEN EL CALCULO DE PREDICADOS (C.P.).

Existe un tipo particular de teorías formales, las cuales son de interés esencial para los estudiosos de la lógica matemática, éstas son las teorías de primer orden, con igualdad.

Este interés radica, fundamentalmente en que se pueden estudiar las principales propiedades (las de primer orden), de estructuras matemáticas al formalizarlas como una teoría de dicho tipo.

Así pues, en esta última sección, definiremos formalmente todos los conceptos necesarios para dichas teorías y para ejemplificar construiremos un cálculo de predica-

---

<sup>7</sup>En las teorías cuyo lenguaje tiene como símbolo a la negación ( $\neg$ ), suele aceptarse a esta proposición como definición de consistencia (sintáctica).

dos, siendo este último la “parte lógica” de otras teorías, de primer orden, más complejas.

## 5.1 DEFINICION

Un lenguaje  $L = \langle S, \phi \rangle$  se dice que es de *primer orden* sí y sólo si:

1. El conjunto de símbolos,  $S$ , está dado por la unión de los siguientes conjuntos:
  - (a) Un conjunto numerable de variables, digamos
 
$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$
  - (b) Un conjunto vacío o finito o infinito de constantes, digamos
 
$$\{a_1, a_2, \dots\}$$
  - (c) Un conjunto vacío o finito o infinito de letras funcionales cada una con su aridad, digamos
 
$$\{f_i^n | n \leq \omega\}$$
  - (d) Un conjunto vacío o finito o infinito de letras predicativas cada una con su aridad, digamos
 
$$\{P_i^n | n \leq \omega\}$$
  - (e) Un conjunto mínimo de conectivos <sup>8</sup>
  - (f) El conjunto de símbolos de puntuación:
 
$$\{), (, '\}$$
  - (g) Un conjunto de cuantificadores: ya sea el universal  $\forall x_i$  o el existencial  $\exists x_i$  o ambos, para cada variable  $x_i$ .
  - (h) El conjunto con el símbolo de igualdad:  $(\approx)$ .
2. Para definir el conjunto de f.b.f.,  $\phi$ , necesitamos definir lo que es un término, esto lo haremos de forma recursiva:
  - (a) Toda variable o constante es un término.
  - (b) Si  $f_i^n$  es la  $i$ -ésima letra funcional cuya aridad es  $n$ , y si  $t_1, t_2, \dots, t_n$  son términos, entonces  $f_i^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$  también es un término.
  - (c)  $t$  es un término sólo si se puede mostrar que lo es con base en (a) y (b).
3. Las reglas para formar las f.b.f. dependen, esencialmente, de los conectivos y cuantificadores que se hayan elegido. Para ejemplificar supondremos que los conectivos son  $\{\neg, \rightarrow\}$  y como cuantificador único al universal. Para este caso, damos la definición de f.b.f.:

---

<sup>8</sup>En la lógica clásica, es usual dar un conjunto mínimo de conectivos y expresar el resto en función de los primeros.

- (a) Si  $P_i^n$  es la  $i$ -ésima letra predicativa cuya aridad es  $n$ , y  $t_1, t_2, \dots, t_n$  son términos, entonces  $P_i^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$  y  $(t_1 \approx t_2)$  son f.b.f.
- (b) Si  $A, B$  son f.b.f. y  $x_i$  es la  $i$ -ésima variable, entonces  $(A \rightarrow B), (\neg A), (\forall x_i A)$  son f.b.f.
- (c)  $A$  es una f.b.f. sólo si se puede mostrar que lo es, repitiendo un número finito de veces los pasos (a) y (b).

Algo que debemos aclarar es que el paso (b) de la definición de f.b.f. depende de los conectivos y cuantificadores que contenga  $S$ , pero no ocurre así con (a) que dependerá de las constantes, letras funcionales y predicativas de la parte 2. es decir, de los símbolos de 1.b, 1.c y 1.d; si éstos tres fueran vacíos, será el lenguaje puro de la igualdad.

El nombre de primer orden viene, en contraste con teorías de otro orden, por dos razones: la primera es porque la cuantificación, ya sea universal o existencial, se hace sobre variables individuales y no sobre letras predicativas, y segundo, las letras predicativas se “aplican” sólo a términos y se prohíbe aplicarlas a predicados, v.g., no se permite “hablar” de propiedades de propiedades, sólo de propiedades de “individuos”. Los símbolos de 1.a, 1.e, 1.f, 1.g y 1.h aparecerán en cualquier lenguaje de primer orden con igualdad.

## 5.2 DEFINICION

Sea  $SF = \langle L, R_{ii \in I} \rangle$  un sistema formal, se dice que SF es un *sistema formal de primer orden* sí y sólo si, el lenguaje  $L$ , de SF es de primer orden.

Existen muchísimas formas de formalizar el cálculo de predicados (C.P.) y esto depende de cuales son específicamente, los símbolos del lenguaje que se quieran utilizar. Esto es claro, cuando recuerda que el CP no es otra cosa que la formalización de las propiedades “universalmente validas”. De hecho, aquí construiremos una infinidad de formalizaciones para el cálculo de predicados.

Así pues, consideremos dados los conjuntos de las variables, las constantes, las letras predicativas y las letras funcionales. Para este caso supondremos que el conjunto de conectivos es  $\{\neg, \rightarrow\}$  y que los cuantificadores son los universales. El conjunto de f.b.f. está dado precisamente por el 3. de la sección anterior. A este lenguaje de primer orden lo denotaremos por  $L_{CP}$ .

El sistema formal de primer orden será:

$$CP = \langle L_{CP}, \{MP, GEN\} \rangle$$

donde MP es el modus ponens y GEN es la regla de inferencia *generalización* que trabaja así:

Si  $A$  es una f.b.f. y  $x$  es una variable, entonces

$$\text{GEN: } \frac{A}{(\forall x A)}$$



Finalmente, por  $\mathbf{CP}$  entenderemos la teoría formal de primer orden, en el sistema  $\mathbf{CP}$ , que se obtiene al tomar la cerradura deductiva de los siguientes conjuntos de f.b.f. de  $L_{CP}$

$Ax_1 : \{(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \mid A, B \text{ son f.b.f.}\}$

$Ax_2 : \{((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \mid A, B, C \text{ son f.b.f.}\}$

$Ax_3 : \{(((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow A)) \mid A, B \text{ son f.b.f.}\}$

$Ax_4 : \{(\forall x A(x) \rightarrow A(t)) \mid A \text{ es una f.b.f., } x \text{ es una variable y } t \text{ es un término libre para } x \text{ en } A(x)\}$

$Ax_5 : \{((\forall x(A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x B))) \mid A, B \text{ son f.b.f. y } x \text{ es una variable que no ocurre libre en } A\}$

$Ax_6 : \{(\forall x(x \approx x)) \mid x \text{ es una variable}\}$

$Ax_7 : \{(\forall x(\forall y((x \approx y) \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y)))) \mid A \text{ es una f.b.f.; } x, y, \text{ son variables, } A(y) \text{ denota la sustitución de } y \text{ por algunas ocurrencias de } x \text{ en } A(x)\}$

Así pues,

$$\mathbf{CP} = \overline{Ax_1 \cup Ax_2 \cup Ax_3 \cup Ax_4 \cup Ax_5 \cup Ax_6 \cup Ax_7}$$

Para terminar, diremos que la teoría  $\mathbf{CP}$  es correcta y completa *sémanticamente* respecto a las universalmente validadas (ver [10] p.70); que las proposiciones 4.4 y 4.5 son ciertas para  $\mathbf{CP}$ ; que  $\mathbf{CP}$  es consistente (ver [10] p.62) e independiente por conjuntos de axiomas (ver [3] pp. 51-52).

## References

- [1] Bell. J. & Slomson A., “Models and Ultraproducts”, Ed. North-Holland, 1971.
- [2] Bochenski J., “Compendio de Lógica Matemática”, Ed. Siglo XXI.
- [3] Bridge J., “Beginning model theory”, Ed. Oxford, 1977.
- [4] Chang C. & Keisler H., “Model theory”, Ed. North-Holland, 1973.
- [5] Copi. I., “Lógica Simbólica”, Ed. CECSA.
- [6] DeLong H., “A Profile of Mathematical Logic”, Ed. Adisson-Wesley, 1971.
- [7] Kleene S., “Mathematical Logic”, Ed. J. Wiley, 1967.
- [8] , “Introducción a la Metamatemática”, Ed. TECNOS.
- [9] Langer S., “Introducción a la Lógica Simbólica”, Ed. Siglo XXI.
- [10] Mendelson E., “Introduction to Mathematical Logic”, Ed. Van Nostrand, Second Edition, 1979.

- [11] Nagel E. & Newman J., “El Teorema de Gödel”, Ed. TECNOS.
- [12] Shoenfield J., “Mathematical Logic”, Ed. Addison-Wesley, 1967.