Sistemas Axiomáticos:

I.1.1. Haga ver que un enunciado de un sistema axiomático es verdadero, en un modelo, si y solo si su negación es falsa, en dicho modelo. (1 pto).

I.1.8. Considérese un conjunto K de elementos indefinidos, que representaremos con minúsculas, y designemos por R, una relación binaria indefinida (es decir, una relación que conecta a dos elementos de K) que puede o no verificarse entre un par de elementos de K. Si el elemento a de K se relaciona con el b de K por la relación R, escribiremos aRb. Ahora admitamos los cuatro siguientes postulados referentes a los elementos de K y a la relación binaria R.
P1 : Si a y b son elementos distintos de K, entonces aRb ó bien bRa.
P2 : Si a y b son elementos cualesquiera de K tales que aRb, entonces a es distinto de b.
P3 : Si a, b, c son tres elementos cualesquiera de K tales que aRb y bRc, entonces aRc.
P4 : K consiste de 4 elementos distintos.
Dedúzcanse los seis siguientes teoremas de los cuatro postulados anteriores.
T1 : Si aRb, entonces no tenemos que bRa.
T2 : Si aRb, entonces no hay un c tal que cRa y bRc.
T3 : Hay exactamente un elemento de K que no está relacionado, bajo R, con ningún elemento de K.
Definición1 : Si bRa, decimos que aDb.
T4: Si aDb y bDc, entonces aDc.
(1 pto).

Consistencia:

I.2.4. Establézcase la consistencia absoluta del conjunto de postulados del ejercicio I.1.8 por medio de cada uno de los siguientes modelos:
a) Supóngase que K consiste de un hombre, su padre, el padre de su padre y el padre del padre de su padre, e interpretemos aRb por: a es un antecesor de b.
b) Supóngase que K consiste de cuatro puntos distintos en una recta horizontal e interpretemos aRb por: a está a la izquierda de b.
c) Supóngase que K consiste de los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e interpretemos aRb por: $a < b$.
Tradúzcanse los enunciados de los teoremas y definiciones del sistema a las interpretaciones anteriores.
(1 pto).

I.2.1. Sea P un conjunto de postulados de un sistema axiomático L. Conteste:
a) Si σ es un enunciado de L y P es inconsistente, ¿$P \cup \{ \sigma \}$ seguirá siendo inconsistente?
b) Si σ es un enunciado de L y P no tiene modelos, ¿Tendrá modelos $P \cup \{ \sigma \}$?
c) Si p es un postulado de P y P no tiene modelos, ¿Tendrá un modelo $P - \{p\}$?
d) Si p es un postulado de P y P es inconsistente, ¿Será inconsistente $P - \{p\}$?
De pruebas y contraejemplos.
(1 pto).

Independencia:

I.3.7. Una estructura algebraica se dice que es un Sistema de Peano, si es modelo del siguiente sistema axiomático:
Términos primitivos:
a) Un conjunto K de elementos no definidos.
b) Una función $S : K \rightarrow K$, no definida.
Postulados:
P1 : Si $S(x) = S(y)$ entonces $x = y$.
P2 : Existe un elemento z tal que $z \neq S(x)$ para cualquier x.
P3 : Si A es un subconjunto de K con las propiedades:
a) $z \in A$ (z el elemento de P2).
b) Si para cualquier $x \in A$ se tiene que $S(x) \in A$, entonces $A = K$.
Demuestre que este sistema es consistente relativamente (a alguna estructura familiar) y que sus postulados son independientes.
(1 pto).

I.3.5. Establézcase la independencia del conjunto de postulados del ejercicio I.1.8. (1 pto).

Completez:
*Nota: Para cuando leas esta tarea, lo que yo creo más posible es que ya hayamos estudiado en clase el concepto de completez, si no es asi, lee la última sección de la tesis de Rafael Rojas Barbachano para tener la herramienta necesaria. Esta sección la trabajaremos bajo la hipótesis de que todo Sistema consistente tiene modelo. (Más adelante probaremos esta proposición).

I.4.2. ¿Si dos sistemas tienen el mismo número de elementos ellos son isomorfos? Demuestra o da un contraejemplo. (1 pto).

I.4.7. Demuestre que el sistema axiomático dado en el ejercicio I.1.8 es categórico y por tanto completo. (1 pto).

Random:
I.5.1 Sean S1, S2, S3 sistemas axiomáticos, tales que S1 es modelo de S2 para alguna interpretación de los términos primitivos, S2 es modelo de S3 para alguna interpretación de los términos primitivos de S2. Demuestra que S1 es modelo de S3 bajo alguna interpretación. (2 ptos).

I.5.2 Jerarquía Diabólica:
Empezaremos a describir un sistema axiomático que llamaremos JD. Los términos primitivos de JD son los demonios, los demonios están parcialmente ordenados (de manera estricta) por la relación “rezarle a” que abreviaremos R. Existe un angel especial llamado Luz Bel.
JD tiene este conjunto de postulados:
- “reazarle a” es un orden parcial estricto. (Observa que estos son varios postulados).
- Luz Bel no le reza a ningún demonio.
- Si un demonio D no le reza a ningún otro demonio, entonces ese demonio es Luz Bel.
- Todo demonio le reza a una cantidad finita de demonios.
- Para todo demonio D, existe un demonio B, tal que B le reza a D.
- Para todo demonio B, C, D. Si C le reza a B y C le reza a D, entonces ((B le reza a D) o (D le reza a B) o (B y D son iguales)).
Definimos la relación binaria entre demonios “pactar con” de la siguiente manera:

Un demonio B pacta con un demonio C si y sólo si [(B le reza a C) y (no existe demonio D tal que [B le rece a D] y [D le rece a C])].
- Para todo par de demonios D, C. Si D pacta con C entonces el número de demonios que pactan con D es exactamente el número de demonios a los cuales C les reza más uno.

Llamemos N(m) al enunciado que dice: Exactamente m demonios pactan con Luz Bel. (Donde m es un natural fijo).
Sea JDm el sistema axiomático que se obtiene de JD al agregar N(m).
Demuestra, exponiendo JD como modelo relativo, que la consitencia de JD implica la consistencia de JDm.   (10 ptos)