Tarea Extra

Lógica Matemática II

Rafael Barbachano, Santiago Martínez

1 Lógica Modal

1. Cuales de las siguientes fórmulas son válidas (pruebelo):
   (a) $\Box\Box A \to \Box A$
   (b) $\Box\Diamond A \to \Diamond A$
   (c) $\Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
   (d) $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$
   (e) $(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$
2. Sean $\mathfrak{M} = (M, R, V)$ y $\mathfrak{N} = (N, S, W)$ dos modelos de Kripke. Una bisimulación entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ es una relación $T \subseteq M \times N$ tal que:
   - Si dos mundos están relacionados (mTn) entonces $V(m, P_i) = W(n, P_i)$ para toda $i \in \omega$.
   - Si mTn y existe un $m' \in M$ tal que mRm' entonces también existe un $n' \in N$ tal que nSn' y $m'Tn'$.
   - Si mTn y existe un $n' \in N$ tal que nSn' entonces también existe un $m' \in N$ tal que mRm' y $m'Tn'$.

   Demuestre que si existe una bisimulación T entre $\mathfrak{M} = (M, R, V)$ y $\mathfrak{N} = (N, S, W)$, $\alpha \in FRM_{LM}$ y mTn entonces $m \vDash_{\mathfrak{M}} \alpha$ si y solo si $n \vDash_{\mathfrak{N}} \alpha$.
3. Sea (M,R) un marco de Kripke, P_i una letra proposicional. Demuestre que:
   (a) $(M, R) \vDash \Box P_i \to P_i$ si y solo si R es reflexiva.
   (b) $(M, R) \vDash \Box \to \Box\Box P_i$ si y solo si R es transitiva.
   (c) $(M, R) \vDash P_i \to \Box\Diamond P_i$ si y solo si R es simétrica.

2 Lógica Intuicionista

1. Demuestre que las siguientes fórmulas son teoremas de IPC (sin usar completud para IPC):
   (a) $\phi \to \neg\neg\phi$
   (b) $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$
   (c) $((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \to \phi$
2. Sea $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ un álgebra de Heyting. Si $\neg\neg : A \to A$ es el operador que a cada elemento lo manda a la negación de su negación $\neg\neg(a) = \neg\neg a$, demuestre que $\neg\neg[A]$ es un álgebra Booleana.
3. Definimos un operador sobre las fórmulas de LI: $\_^m : FRM_{LI} \to FRM_{LM}$ de manera recursiva:
   - $(P_i)^m = \Box P_i$
   - $\bot^m = P_0 \wedge \neg P_0$
   - $(\alpha \wedge \beta)^m = \alpha^m \wedge \beta^m$
   - $(\alpha \vee \beta)^m = \alpha^m \vee \beta^m$
   - $(\alpha \to \beta)^m = \Box(\alpha^m \to \beta^m)$

   Sea (M,R) un marco de Kripke (en el sentido intuicionista, es decir reflexivo y transitivo), α una fórmula de LI, demuestre que $(M, R) \Vdash \alpha$ si y solo si $(M, R) \vDash \alpha$.