Tarea:

I. Sean α, $\mathcal{T}$, $\mathcal{C} \in \Phi(\mathbb{B})$ donde $\mathcal{T}$ es una tautología y $\mathcal{C}$ es una contradicción. Encuentra una fórmula equivalente pero más simple a:

1. $\mathcal{T} \,\&\, \alpha$ 2. $\mathcal{T} \vee \alpha$ 3. $\mathcal{C} \,\&\, \alpha$ 4. $\mathcal{C} \vee \alpha$

II. Sean A, $B \in \mathbb{B}$. Considere las siguientes $\mathbb{B}$–fórmulas,

(a) A (d) $\neg A \vee B$ (g) $A \rightarrow B$

(b) B (e) $\neg B \rightarrow A$ (h) $\neg B \rightarrow \neg A$

(c) $A \vee B$ (f) $A \leftrightarrow B$ (i) $A \,\&\, \neg B$

Cuáles de las anteriores $\mathbb{B}$–fórmulas son consecuencias lógicas de:

1. $A \,\&\, B$
2. $A \rightarrow B$
3. $\neg(A \rightarrow B)$
4. $A \vee B$
5. $A \leftrightarrow B$
6. $\neg(A \leftrightarrow B)$

III. Si bajo una $\mathbb{B}$–asignación de valores de verdad, la $\mathbb{B}$–fórmula $(A \rightarrow B)$ toma el valor de 1, ¿qué puede deducir acerca del valor de verdad que toman las siguientes $\mathbb{B}$–fórmulas?

1. $(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
2. $(A \,\&\, C) \rightarrow (B \,\&\, C)$
3. $(\neg A \,\&\, B) \leftrightarrow (A \vee B)$

IV. Si bajo una $\mathbb{B}$–asignación de valores de verdad, la $\mathbb{B}$–fórmula $(A \leftrightarrow B)$ toma el valor de 0, ¿qué puede deducir acerca del valor de verdad que toman las siguientes $\mathbb{B}$–fórmulas?

1. $A \,\&\, B$ 2. $A \vee B$ 3. $A \rightarrow B$ 4. $(A \,\&\, C) \leftrightarrow (B \,\&\, C)$

Y ¿si $(A \leftrightarrow B)$ toma el valor de 1?

V. Para cada uno de los conjuntos siguientes, indica si es satisfacible o no. En caso afirmativo, da una $\mathbb{B}$–asignación que lo muestre.

1. $\left\{A \rightarrow B \ , \ \neg A \rightarrow \neg B\right\}$

2. $\left\{\neg A \vee B \ , \ B \rightarrow \neg A \ , \ A\right\}$

3. $\{A \to \neg(B \,\&\, \neg C)\ ,\ A \,\&\, \neg C\ ,\ B \lor C\}$

4. $\{A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)\ ,\ (A \,\&\, B) \to C\ ,\ A \to \neg C\}$

5. $\{\neg(A \to \neg(A \to B))\ ,\ C \to \neg A\ ,\ B \leftrightarrow \neg C\}$

6. $\{A \to (A \to B)\ ,\ (B \lor C) \to A\ ,\ C \to (A \lor B)\}$

VI. Sea Σ un conjunto de fórmulas en las que las únicas letras proposicionales que aparecen son A, B, C, y D. Si las únicas $\mathbb{B}$–asignaciones que satisfacen a Σ son

A	B	C	D
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
0	0	1	1

¿ cuáles de las siguientes fórmulas son consecuencia de Σ ?

a). A

b). $A \,\&\, B$

c). $A \,\&\, \neg A$

d). $C \to D$

e). $A \lor D$

f). $C \leftrightarrow \neg A$

g). $D \to (D \lor B)$

h). $(C \,\&\, D) \to A$

VII. Determina si los siguientes argumentos son correctos o no. Si un argumento es incorrecto, da una $\mathbb{B}$–asignación que lo muestre.

a).
$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \alpha \to \neg\beta \\ \hline \neg\alpha \end{array}$$

d).
$$\begin{array}{c} \alpha \leftrightarrow \neg\beta \\ \alpha \to \gamma \\ \hline \gamma \lor \beta \end{array}$$

b).
$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \alpha \lor \beta \\ \hline \beta \end{array}$$

e).
$$\begin{array}{c} (\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow \gamma \\ \neg\gamma \\ \hline \neg\alpha \,\&\, \neg\beta \end{array}$$

c).

$$\begin{array}{c} \alpha \to \neg\beta \\ \alpha \ \& \ \beta \\ \hline \gamma \end{array}$$

f).

$$\begin{array}{c} \neg(\alpha \ \& \ \beta \ \& \ \gamma) \\ (\alpha \ \& \ \gamma) \vee (\beta \ \& \ \gamma) \\ \hline \alpha \to \neg\beta \end{array}$$

VIII. Sea $\Sigma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \Phi(\mathbb{B})$.
Considere las siguientes afirmaciones:

1. Si $\Sigma \not\models \alpha$, entonces $\Sigma \models \neg\alpha$

2. Si $\Sigma \models \neg\alpha$, entonces $\Sigma \not\models \alpha$

3. Si $\Sigma \models \alpha \ \& \ \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$

4. Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha \ \& \ \beta$

5. Si $\alpha \ \& \ \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$

6. Si $\alpha \ \& \ \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ o $\beta \models \gamma$

7. Si $\Sigma \models \alpha \vee \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$

8. Si $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha \vee \beta$

9. Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ o $\beta \models \gamma$

10. Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$

11. Si $\alpha \models \beta$ y $\gamma \models \delta$, entonces $\alpha \vee \beta \models \gamma \vee \delta$

¿Cuáles de éstas son ciertas y cuáles son falsas? Si son verdaderas, pruebelo. Si son falsas, refutelas.

IX. Las mismas hipótesis y la misma pregunta que en ejercicio anterior, pero ahora considere las siguientes afirmaciones.

1. Si $\Sigma \not\models \alpha$, entonces α es contingente.

2. $\alpha \models \beta$ syss el conjunto de fórmulas $\{\neg\alpha, \beta\}$ es insatisfacible.

3. Si $\alpha \models \beta$ y $\alpha \models \neg\beta$, entonces $\models \neg\alpha$.

4. Si $\models \alpha$ y β es contingente, entonces $\alpha \not\models \beta$.

5. Si α es contingente y $\alpha \models \beta$, entonces β no es una contradicción.

X. ¿Cuántas fórmulas **no**–lógicamente equivalentes entre sí hay, que tengan exactamente n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ letras proposicionales? ¿por qué?

XI. **F**orma **N**ormal **C**onjuntiva (**FNC**).

1. Da la definición de que una fórmula esté escrita en **FNC**.

2. Enuncia con todo detalle el resultado que garantiza la equivalencia lógica de una fórmula con una **FNC**.

3. Dá método para encontrar una **FNC** lógicamente equivalente a una función veritativa dada

XII. Encuentra una FND y una FNC para el bicondicional, $(\alpha \leftrightarrow \beta),$ y otro tanto para su negación, $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

XIII. **Circuito Mayorías** (μ).

1. Construye la tabla correspondiente.

2. Encuentra una FND o una FNC para **1**.

3. Reduce la fórmula del **2**. a una lógicamente equivalente más simple, es decir que tenga pocos conectivos (se pueden usar el condicional y el bicondicional).

4. Has el diagrama del circuito lógico (con cajitas y cables) correspondiente a **3**.

XIV. El problema de los gnomos gemelos (mentirosos o veraces).

Estás en la tierra habitada por gente que o siempre dice la verdad o siempre dice mentiras. Llegas a una encrucijada en el camino y necesitas saber cuál de los caminos te lleva al *Infierno* y cuál al *Paraiso*. En la mera encrucijada te encuentras a dos peculiares gnomos gemelos sentados bajo un cartel que a la letra dice: "¡Sientase con confianza! usted puede hacer una pregunta, pero solo una, a uno de nosotros y esté seguro que le responderá con un *sí* o con un *no*". ¿Qué pregunta harías para saber qué camino debes tomar?

XV. **Dualidad**.

Sea α una fórmula booleana (normal)

1. Sea α' la fórmula que resulta de α al intercambiar el conectivo $\&$ por el conectivo $\vee$ y viceversa.

a. Prueba que, $\models \alpha$ syss $\models \neg\alpha'$. Y por tanto

b. Si β y γ son fórmulas booleanas, entonces

i. $\models \beta \rightarrow \gamma$ syss $\models \beta' \rightarrow \gamma'$.

ii. $\models \beta \leftrightarrow \gamma$ syss $\models \beta' \leftrightarrow \gamma'$.

2. Sea α^* la fórmula que resulta de sustituir en α cada letra proposicional por su negación y de cambiar el $\&$ por el $\vee$ y el $\vee$ por el $\&$. Prueba, usando el Principio de Inducción sobre la formación de fórmulas, que

$$\neg\alpha \equiv \alpha^*$$

O equivalentemente, $\alpha \equiv \neg\alpha'$.

XVI. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Phi(\mathbb{B})$. Así,

1. $\alpha \equiv \alpha$

2. Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $(\neg\alpha) \equiv (\neg\beta)$

3. Si $\alpha \equiv \beta$ y $\gamma \equiv \delta$, entonces $(\alpha \diamond \gamma) \equiv (\beta \diamond \delta)$
Donde $\diamond \in \left\{ \; \& \; , \; \vee \; , \; \to \; , \; \leftrightarrow \; \right\}$

XVII. Sean $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Phi(\mathbb{B})$ tales que $\alpha \equiv \alpha'$ y $\beta \equiv \beta'$. Prueba las siguientes afirmaciones, usando cadenas de equivalencias lógicas, teoremas de sustitución y el resultado anterior (Justifica cada paso).

1. **a**). $\alpha \,\&\, \beta \;\equiv\; \neg\left(\alpha' \;\to\; \neg\beta'\right)$

b). $\alpha \vee \beta \;\equiv\; \neg\alpha' \to \beta'$

c). $\alpha \leftrightarrow \beta \;\equiv\; \neg\Big((\alpha' \to \beta') \;\to\; \neg(\beta' \to \alpha')\Big)$

2. **a**). $\alpha \vee \beta \;\equiv\; \neg(\neg\alpha' \,\&\, \neg\beta')$

b). $\alpha \to \beta \;\equiv\; \neg(\alpha' \,\&\, \neg\beta')$

c). $\alpha \leftrightarrow \beta \;\equiv\; \neg(\alpha' \,\&\, \neg\beta') \,\&\, \neg(\beta' \,\&\, \neg\alpha')$

3. **a**). $\alpha \,\&\, \beta \;\equiv\; \neg\left(\neg\alpha' \;\vee\; \neg\beta'\right)$

b). $\alpha \to \beta \;\equiv\; \neg\alpha' \vee \beta'$

c). $\alpha \leftrightarrow \beta \;\equiv\; \neg\Big(\neg(\neg\alpha' \vee \beta') \;\vee\; \neg(\neg\beta' \vee \alpha')\Big)$

XVIII. Prueba uasando inducción sobre la formación de fórmulas, que los siguientes conjuntos de conectivos son completos (suficientes),

1. $\left\{ \neg\, , \; \& \; , \; \vee \right\}$ **2**. $\left\{ \neg\, , \; \& \right\}$ 3. $\left\{ \neg\, , \; \vee \right\}$ 4. $\left\{ \neg\, , \; \to \right\}$

Observa que **1**. nos da otra pueba de que toda fórmula es lógicamente equivalente a una en forma normal.

XIX. Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. Los conjuntos de conectivos $\{\ \rightarrow\ \}$, $\{\ \leftrightarrow\ \}$, $\{\neg\}$, $\{\ \&\ \}$ y $\{\ \vee\ \}$ no son completos (suficientes).

2. $\{\neg,\ \leftrightarrow\ \}$ no es un CMC.

3. Cualquier conectivo ternario es expresable en términos de conectivos binarios y la negación. ¿Qué concluyes con este hecho?

Comentarios a la **TAREA**.

Los problemas vienen numerados con números romanos, algunos vienen con varias preguntas las cuales están numeradas con números arábigos o con letras o la redacción permite distinguir las distintas preguntas. La siguiente lista dice cuantas preguntas tienes que resolver por cada problema.

I. Escoger: 2
II. Escoger: 3
III. Escoger: 1
IV. Escoger: 2 cuando el valor es 0 y Escoger: 2 cuando el valor es 1
V. Escoger: 3
VI. Escoger: 3
VII. Escoger: 3
VIII Escoger: 5
IX. Escoger: 2
X. Todo
XI. Todo
XII. La FNC y la FND de una de las dos bicondicionales.
XIII. Todo
XIV. Todo
XV. Escoger: 1
XVI. La pregunta 2 y de la pregunta 3 Escoger: 2
XVII. Escoger: 1
XVIII. Escoger: 1
XIX. La pregunta 2 y la pregunta 3