ESTRUCTURAS ELEMENTALES

Como ya mencionamos, la Matemática será nuestro lenguaje objeto y al mismo tiempo nuestro metalenguaje (amén del Español). El objetivo de este capítulo será establecer con todo rigor la sintaxis y la semántica de un Lenguaje Formal adecuado para cierto tipo de estructuras matemáticas. Algunos ejemplos de estas estructuras son:

$$\langle \mathbb{N}\,,\ <\rangle\,,\ \langle \mathbb{Z}\,,\ \leq\rangle\,,\ \langle \mathbb{Q}\,,\ >\rangle\,,\ \langle \mathbb{R}\,,\ \geq\rangle\,,\ \langle \wp(A)\,,\ \subseteq\rangle;$$

$$\langle \mathbb{N}\,,\ s\,,\ 0\rangle\,,\ \langle \mathbb{Z}\,,\ \_-1\,,\ 0\rangle;$$

$$\langle \mathbb{Z}\,,\ +\,,\ \cdot\,,\ 0\,,\ 1\rangle\,,\ \langle \mathbb{Q}\,,\ +\,,\ \cdot\,,\ 0\,,\ 1\rangle\,,\ \langle \mathbb{R}\,,\ <\,,\ +\,,\ \cdot\,,\ 0\,,\ 1\rangle$$

$$\langle \wp(A)\,,\ \cup\,,\ \cap\,,\ \_^{c}\,,\ \emptyset\,,\ A\rangle$$

Antes de dar una definición rigurosa de este tipo de estructuras, pongamos en claro algunos conceptos.

En lo que sigue, sea A un conjunto no–vacío y $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Definición. Diremos que r es una *Relación n–aria sobre* A syss

$$r \subseteq A^{n}$$

Definición. Diremos que o es una *Operación n–aria sobre* A syss

$$o\ :\ A^{n} \longrightarrow A$$

Definición. $\mathfrak{A}$ es una *Estructura Elemental* syss $\mathfrak{A} = \langle A\,,\ \mathcal{R}\,,\ \mathcal{O}\,,\ \mathcal{E}\rangle$, donde:

- •) A es un conjunto no– vacío, llamado *Universo* o *Base* de $\mathfrak{A}$.
- • •) $\mathcal{R}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de relaciones sobre A.
- • • •) $\mathcal{O}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de operaciones sobre A.
- • • • •) $\mathcal{E}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de elementos de A, llamados *Elementos Distinguidos* de $\mathfrak{A}$.

Los ejemplos anteriores los podemos *ver* como estructuras elementales:

1. $\langle \mathbb{N}\,,\ \{\ <\ \}\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\rangle$, $\langle \mathbb{Z}\,,\ \{\ \leq\ \}\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\rangle$, $\langle \mathbb{Q}\,,\ \{\ >\ \}\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\rangle$, $\langle \mathbb{R}\,,\ \{\ \geq\ \}\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\rangle$, $\langle \wp(A)\,,\ \{\subseteq\}\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\rangle$;

2. $\langle \mathbb{N}\,,\ \emptyset\,,\ \{\ s\ \}\,,\ \{0\}\rangle$, $\langle \mathbb{Z}\,,\ \emptyset\,,\ \{\ \_-1\ \}\,,\ \{0\}\rangle$;

3. $\langle \mathbb{Z}\,,\ \emptyset\,,\ \{+\,,\ \cdot\}\,,\ \{0\,,\ 1\}\rangle$, $\langle \mathbb{Q}\,,\ \emptyset\,,\ \{+\,,\ \cdot\}\,,\ \{0\,,\ 1\}\rangle$;

4. $\langle \mathbb{R} , \{ < \} , \{ + , \cdot \} , \{ 0 , 1 \} \rangle$;

5. $\langle \wp(A) , \emptyset , \{ \cup , \cap , \_^{\mathbf{c}} \} , \{ \emptyset , \mathbf{A} \} \rangle$.

NO-ejemplos:

6. La Geometría Euclideana Plana, no se puede ver como una estructura elemental.

7. Los Espacios Vectoriales, de principio, no se pueden trabajar como una estructura elemental.

8. Espacios Topológicos.

Más ejemplos:

9. $\langle \mathbb{Z} , \{ | \} , \emptyset , \emptyset \rangle$ donde "|" es la divisibilidad entre Enteros.

10. $\langle \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} , \emptyset , \{ \div \} , \{ \pi , e^{-1} \} \rangle$.

11. $\langle \mathbb{N} , \{ \emptyset \} , \{ \_ + 41 \} , \{ 28 , 35 \} \rangle$.

12. Las estructuras triviales :

a). $\langle A , \emptyset , \emptyset , \emptyset \rangle$ con A un conjunto cualquiera, pero no–vacío.

b). $\langle A , \mathcal{R} , \mathcal{O} , A \rangle$ donde $A \neq \emptyset$, $\mathcal{R}$ es el conjunto de todas las relaciones sobre A; $\mathcal{O}$ es el conjunto de todas las operaciones sobre A y tiene a todos los elementos de A como elementos distinguidos (*Estructura Saturada de* A).

Nota. Sea $\mathfrak{A} = \langle A , \mathcal{R} , \mathcal{O} , \mathcal{E} \rangle$ una estructuras elemental. En el caso en que,

1. $\mathcal{R} = \emptyset$, a la estructura $\mathfrak{A}$ se le llama *Estructura Algebraica.*

2. $\mathcal{O} = \emptyset = \mathcal{E}$, a la estructura $\mathfrak{A}$ se le llama *Estructura Multirrelacional.*

Tipo de Semejanza

Iniciamos la simbolización o formalización de los elementos constitutivos de las Estructuras Elementales.

Consideremos una estructura elemental arbitraria:

$$\langle A\,,\,\mathcal{R}\,,\,\mathcal{O}\,,\,\mathcal{E}\rangle$$

Necesitamos un símbolo para cada relación, uno para cada operación y otros para cada elemento distinguido. Y debido a que las relaciones y las operaciones tienen una determinada aridad, habrá que asociar a los símbos para ellos, un entero positivo.

Procedamos ahora con el lenguaje formal, daremos los primeros símbolos de nuestro alfabeto. Y esto lo haremos con todo el rigor necesario (el formal).

Definición. Diremos que ρ es un *Tipo de Semejanza* syss ρ es un conjunto, posíblemente vacío, de símbolos de la forma:

$$\rho = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n\right) \cup \mathcal{C}$$

donde,

•) Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{P}_n$ es un conjunto de símbolos; llamados *Letras Predicativas.* *Si* $s \in \mathcal{P}_n$, se dirá que s es o tiene *aridad* n.

• •) Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{F}_n$ es un conjunto de símbolos; llamados *Letras Funcionales.* *Si* $s \in \mathcal{F}_n$, se dirá que s es o tiene *aridad* n. Y

• • •) $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos; llamados *Constantes Individuales.*

Petición: Ningún símbolo es una sucesión finita de otros símbolos.

Ejemplos: …

Notación:

1. Usaremos las letras mayúsculas: P, Q, R, S, con índices y supraíndices, como *metavariables* para denotar –es decir, que variaran entre– las letras predicativas.

2. Usaremos las letras minúsculas: f, g, h, con índices y supraíndices, como *metavariables* para denotar letras funcionales.

3. Usaremos las letras minúsculas: c, d, e, con índices y supraíndices, como *metavariables* para denotar a las constantes individuales.

Como trabajaremos, de ahora en adelante, es meternos a un proceso en "espiral", vamos a: simbolizar $\hookrightarrow$ interpretar $\hookrightarrow$ simbolizar $\hookrightarrow$ interpretar; de tal manera que iremos construyendo el lenguaje formal adecuado para hablar de las estructuras elementales y a su vez cómo vamos interpretandolo.

Debido a este proceso, el alfabeto que iremos construyendo será un conjunto de símbolos formales, partiendo de un tipo de semejanza específico, digamos ρ, al cual iremos agregando más símbolos formales. Lo denotaremos por $\mathcal{L}_\rho$.

En lo que sigue, fijemos un tipo de semejanza:

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \right) \cup \mathcal{C}$$

Así, nuestro alfabeto, inicia como:

$$\mathcal{L}_\rho = \rho \quad (\cup \ldots)$$

De ahora en adelante, entenderemos por una *Expresión de tipo* ρ, en breve, *una ρ–expresión,* a una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_\rho$, o dicho conjuntistamente, a una función con dominio un segmento inicial de los números naturales e imagen en $\mathcal{L}_\rho$. Teniendo en cuenta que con este proceso, nuestro alfabeto irá creciendo. Solamente hay una petición o restricción, que es que **ningún símbolo es una sucesión finita de otros símbolos**.

Notación:

$$\begin{aligned} EXP_\rho &= \left\{ e \ / \ e \text{ es una } \rho\text{–expresión} \right\} \\ &= \left\{ e \ / \ e \text{ es una sucesión finita de símbolos de } \mathcal{L}_\rho \right\} \\ &= \left\{ e \ / \ \text{hay un } n \in \mathbb{N},\ e : \{0, \ldots, n\} \to \mathcal{L}_\rho \right\} \end{aligned}$$

Términos de tipo ρ.

En el lenguaje cotidiano (obviamente en matemáticas), por un término entendemos que es una expresión que se usa para denotar a un elemento o individuo del "mundo" del discurso donde estemos trabajando.

Ejemplos: $0,\ \pi,\ x,\ 28+35,\ \sqrt[2]{-1},\ 3x+2,\ ax^2+bx+c,\ \int_1^x \frac{1}{t}dt,\ \ldots$

Así, un término es un elemento, una variable, el resultado de una(s) operación(es) sobre elementos, etc. Para formalizar la noción de término, ya tenemos a las constantes individuales y las letras funcionales, necesitamos introducir nuevos símbolos. símbolos para **variables formales** –un número numerable es necesario y suficiente– y algunos símbolos de puntuación o también llamados auxiliares.

Así,

$\mathcal{L}_\rho\ =$	ρ	Tipo de semejanza
	$\cup\ \left\{v_i\ /\ i \in \mathbb{N}\right\}$	Un número numerable de variables
	$\cup\ \left\{\ )\ ,\ (\ ,\ ,\ \right\}$	Símbolos de puntuación o auxiliares
	$\cup\ \ldots$	(por aumentar)

Notación:

1. $VAR = \left\{v_i\ /\ i \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Usaremos las letras minúsculas $x,\ y,\ z,\ w,$ con índices, supraíndices para denotar a las variables. Dicho rigurosamente, usaremos estas metavariables que variarán sobre las variables formales.

Una definición de término formal, la podemos dar en forma inductiva, es decir, pensarla como generada a partir de las variables y constantes y aplicar sucesivamente las letras funcionales.

Definición:

1. Las variables y las constantes individuales son ρ–*Términos.*

2. Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ–términos*,* entonces

$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ es un ρ–*Término*

3. Una ρ–expresión es un ρ–término solo si se puede probar que lo es, sobre las bases de las condiciones **1** y **2**.

Notación:

1. $TRM_\rho = \left\{ e \in EXP_\rho \ / \ e \text{ es un } \rho\text{–término} \right\}$.

2. Usaremos la letra griega τ con índices, para denotar a los *términos de tipo* ρ o, en corto, ρ*–términos*.

Una definición alternativa, de término formal, es una de corte conjuntista:

Definición. $\mathbf{TRM}_\rho$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que:

I)

$$VAR \cup \mathcal{C} \in \mathbf{TRM}_\rho$$

Y

II) Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{TRM}_\rho$, entonces

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbf{TRM}_\rho$$

Ejemplos: …

Interpretaciones de tipo ρ

Dado un tipo de semejanza ρ –como conjunto de símbolos formales que es– sus elementos son suceptibles de interpretarse. Pasemos ahora a decir oficialmente, como se interpretan.

Definición. $\mathfrak{A}$ es una *Interpretación de tipo* ρ, en breve, una ρ–*Interpretación* syss

$$\mathfrak{A} = \langle A \,,\, I \rangle$$

donde:

i). A es un conjunto no–vacio

ii). I es una función; llamada *Función de Interpretación y* es tal que tiene como domino a ρ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$:

- **a**). Si $P \in \mathcal{P}_n$, entonces $I(P) \subseteq A^n$.
- **b**). Si $f \in \mathcal{F}_n$, entonces $I(f) : A^n \to A$
- **c**). Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $I(c) \in A$

Obsérvese que podemos asociar a cada ρ–interpretación una Estructura Elemental –la inducida por la imágen de I.

Ejemplos: …

Notación:

a) Sea $\mathfrak{A} = \langle A \,,\, I \rangle$ una ρ–interpretación

- **i**) Si $s \in \rho$, escribiremos $s^{\mathfrak{A}} \rightleftharpoons I(s)$
- **ii**) Si ρ es finito, digamos $\rho = \{s_1, \dots, s_n\}$, escribiremos

$$\langle A \,,\, s_1^{\mathfrak{A}} \,,\, \dots \,,\, s_n^{\mathfrak{A}} \rangle \rightleftharpoons \langle A \,,\, I \rangle$$

b) Usaremos como metavariables:

- Letras góticas (fraktur) mayúsculas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \dots$ para denotar ρ–estructuras. Y
- Las letras mayúsculas A, B, $C, \dots$ para denotar sus respectivos universos o bases.

c) $V_\rho = \left\{ \mathfrak{A} \;/\; \mathfrak{A} \text{ es una } \rho\text{–estructura} \right\}$ es el *Universo de las Estructuras de tipo* ρ.

Interpretación de un ρ–término

Si $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle \in V_\rho$ y $\tau \in TRM_\rho$, ¿Cómo interpretamos a τ en $\mathfrak{A}$? Si en τ no aparecen variables, la interpretación, en $\mathfrak{A}$, es relativamente obvia, lo único que hay que hacer es interpretar las letras funcionales y las constantes –como lo indica la función de interpretación I– y efectuar las operaciones correspondientes sobre los elementos distinguidos obtenidos. Pero si en el término aparece al menos una variable ya la interpretación no queda dada. Hay pues que decir cómo interpretar la o las variables que aparecen en dicho término para poder, ahora sí, interpretar y obtener un elemento del universo de interpretación.

Como queremos dar una definición de la interpretación de un término en general, tenemos que considerar a *todas* las variables y decir de golpe cómo se interpretan todas ellas. Para ello,

Definición. Sea $\langle A, I \rangle \in V_\rho$. Diremos que s es una *Asignación de Valores a las Variables en A, en breve,* una *A–asignación* syss

$$s : VAR \rightarrow A$$

Notación:

1. $^{\omega}A = \left\{ s \;/\; s : VAR \rightarrow A \right\}$.

2. Si $s \in {}^{\omega}A$ y $n \in \mathbb{N}$ escribiremos, $s_n \rightleftharpoons s(v_n)$.

3. Si $s \in {}^{\omega}A$, en muchas ocasiones escribiremos a s más explícitamente como,

$$\langle s_0 , s_1 , \ldots , s_n , \ldots \rangle$$

Ahora, con estos elementos en la mano, pasemos a dar formalmente la,

Definición Recursiva de *Interpretación de un ρ–término τ, en una ρ– estructura $\mathfrak{A}$, bajo la A–asignación s, denotada por $\tau^{\mathfrak{A}}[s]$* :

I) Si $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathcal{C}$, entonces

$$v_n^{\mathfrak{A}}[s] = s(v_n) \qquad \text{y} \qquad c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$$

II) Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$(f(\tau_1, \ldots, \tau_n))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s])$$

Ejemplos: …