Cuantificadores

Ahora simbolizaremos expresiones cuantificadas por ejemplo del tipo:

1. Todos los S son P

2. Ningún S es P

3. Algunos S son P

4. Algunos S no son P

5. Hay uno y sólamente uno que, …

6. Hay almenos uno que, …

7. Para a lo más uno, …

Así pues necesitamos introducir nueva simbología. En lo que sigue, sean α, β, γ ρ–expresiones aceptadas como bien escritas, en nuestro Lenguaje Formal y sean x, y, z variables (estrictamente hablando, meta–variables).

I. "Todos los …, son …"

Símbolos: (_) , $\forall$
Nosotros: $\forall$

Nombre: *Cuantificador Universal*.

Sintaxis: $\left(\forall x\, \alpha\right)$
A α se le llama el *Alcance del cuantificador* $\forall x$.

Lectura: La expresión "$\left(\forall x\, \alpha\right)$" debe leerse de cualquiera de las siguientes maneras:

1. Para toda x, α.

2. Para cada x, α.

3. Todos los x, α.

4. Todos, α.

5. Dada x, α.

6. Cualquiera sea x, α.

II. “Algunos ..., son ...”

Símbolo: $\exists$

Nombre: *Cuantificador Existencial*.

Sintaxis: $\left(\exists x\ \alpha\right)$

A α se le llama el *Alcance del cuantificador* $\exists x$

Lectura: La expresión “$\left(\exists x\ \alpha\right)$” debe leerse de cualquiera de las siguientes maneras:

1. Existe un(a) x tal, que α.
2. Hay una x tal, que α.
3. Para una x se tiene que, α.
4. Hay al menos una x tal, que α.
5. Para al menos una x se tiene que α.
6. Algunos, α.

Semántica de los cuantificadores

Al dar una interpretación, las variables recorrerán sobre los elementos del universo de interpretación y siendo consecuentes con ello, las interpretaciones de “$\forall x$” y “$\exists x$” serán "para todo elemento del universo de interpretación" y "existe un elemento del universo de interpretación", respectivamente.

Ejemplos:

a). Para todo número real, ...

b). Hay un natural tal, que ...

c). Para cada función se tiene que ...

Ahora, si fuera el caso en que la variable x no aparece en α ¿ qué ocurre con las expresiones $\left(\forall x\ \alpha\right)$ y $\left(\exists x\ \alpha\right)$? Resulta que al interpretarlas son sinónimos de α, es decir, éstas no nos dicen nada sobre x.

Supongamos pues que, en α aparece x y escribamos este hecho, por lo pronto, como $\alpha(x)$.

Al interpretar $\alpha(x)$ y no decir cómo se interpretará la variable x, ésta la podemos pensar como una propiedad para los elementos del universo de interpretación.

Sinonimia:

Supongamos que la variable x aparece en la expresión $\alpha,$ es decir tenemos a $\alpha(x)$ y que en ella **no** aparece la variable $y.$ Escribiremos $\alpha(y)$ para denotar a la nueva expresión que se obtiene al reemplazar, en $\alpha,$ todas las ocurrencias de x por $y.$ También supongamos que en la expresión β aparecen las variables x e $y,$ para lo cual pondremos $\beta(x,y).$ Tenemos los siguientes sinónimos.

$$\begin{array}{rcl}
\big(\forall x\ \alpha(x)\big) & \text{sinónimo} & \big(\forall y\ \alpha(y)\big) \\
\big(\exists x\ \alpha(x)\big) & \text{sinónimo} & \big(\exists y\ \alpha(y)\big) \\
\big(\forall x\big(\forall y\ \beta(x,y)\big)\big) & \text{sinónimo} & \big(\forall y\big(\forall x\ \beta(x,y)\big)\big) \\
\big(\exists x\big(\exists y\ \beta(x,y)\big)\big) & \text{sinónimo} & \big(\exists y\big(\exists x\ \beta(x,y)\big)\big)
\end{array}$$

Observación: *No son sinónimos:*

$$\big(\forall x\ \big(\exists y\ \beta(x,y)\big)\big) \text{ y } \big(\exists y\ \big(\forall x\ \beta(x,y)\big)\big)$$

Lo más que podemos afirmar, bajo interpretación, es:

Si $\big(\exists y\ \big(\forall x\ \beta(x,y)\big)\big)$, *entonces* $\big(\forall x\ \big(\exists y\ \beta(x,y)\big)\big)$.

Otros Sinónimos:

$$\begin{array}{rcll}
\big(\neg\big(\forall x\ \alpha(x)\big)\big) & \text{sinónimo} & \big(\exists x\ (\neg\alpha(x))\big) & \\
\big(\neg\big(\exists x\ \alpha(x)\big)\big) & \text{sinónimo} & \big(\forall x\ (\neg\alpha(x))\big) & \text{(“ninguno”)} \\
\big(\neg\big(\forall x\ (\neg\alpha(x))\big)\big) & \text{sinónimo} & \big(\exists x\ \alpha(x)\big) & \\
\big(\neg\big(\exists x\ (\neg\alpha(x))\big)\big) & \text{sinónimo} & \big(\forall x\ \alpha(x)\big) &
\end{array}$$

Pasemos ahora a simbolizar algunas expresiones del español. (Clasificación Aristotélica de los Juicios):

Por lo pronto, sean S y P ρ–expresiones aceptadas como bien escritas, en nuestro Lenguaje Formal, en las cuales aparece la variable x.

(**A** : **Universal Afirmativo**) **Todos los** S **son** P :

$$\Big(\forall x\ \Big(S(x)\ \rightarrow\ P(x)\Big)\Big)$$

(**I** : **Particular Afirmativo**) **Algunos** S **son** P :

$$\left(\exists x\left(S(x)\ \&\ P(x)\right)\right)$$

En cambio:

$$\left(\forall x\left(S(x)\ \&\ P(x)\right)\right)$$

dice: *Todos, son S y son P.* Y

$$\left(\exists x\left(S(x)\ \rightarrow\ P(x)\right)\right)$$

dice: *Hay alguien que en el caso en que tuviera la propiedad S, tendría forzósamente la propiedad P.*

(**O** : **Particular Negativo**) **Algunos** S **no son** P :

$$\left(\exists x\left(S(x)\ \&\ (\neg P(x))\right)\right)$$

(**E** : **Universal Negativo**) **Ningún** S **es** P :

$$\left(\forall x\left(S(x)\ \rightarrow\ (\neg P(x))\right)\right)$$

NOTA: La asignación de estas letras para representar las formas del juicio categórico es posterior a Aristóteles y procede de las palabras latinas ***"AfIrmo"*** y *"n**E**g**O**"*.

Obsérvese que:

$\neg A \rightleftharpoons O$: La negación de un Universal Afirmativo es un Particular Negativo

$$\left(\neg\left(\forall x\left(S(x)\ \rightarrow\ P(x)\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\exists x\, \neg\left(S(x)\ \rightarrow\ P(x)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\exists x\left(S(x)\ \&\ (\neg P(x))\right)\right)$$

$\neg O \rightleftharpoons A$: La negación de un Particular Negativo es un Universal Afirmativo

$$\left(\neg\left(\exists x\left(S(x)\ \&\ (\neg P(x))\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\forall x\left((\neg S(x))\ \vee\ P(x)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\forall x\left(S(x)\ \rightarrow\ P(x)\right)\right)$$

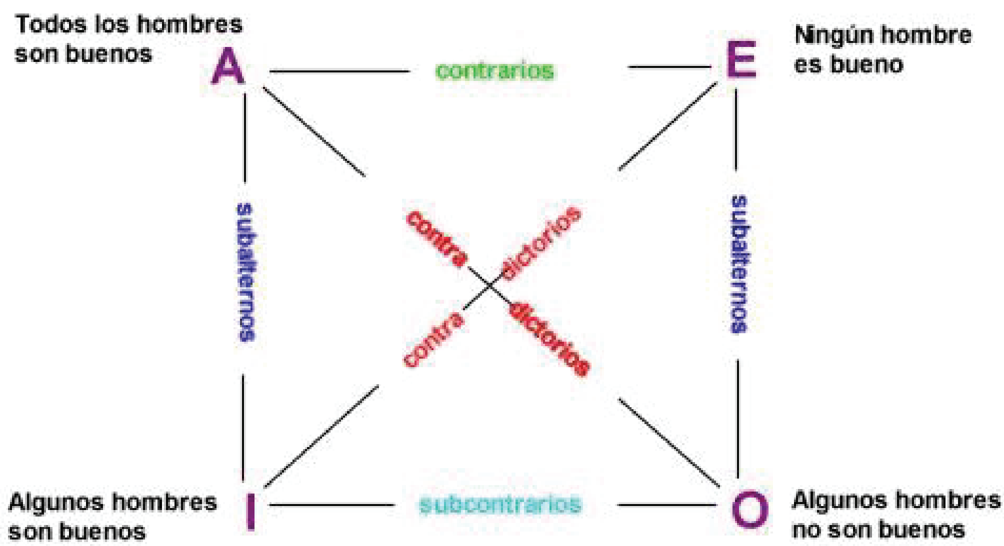
$\neg I \rightleftharpoons E.$ La negación de un Particular Afirmativo es un Universal Negativo

$$\left(\neg\left(\exists x\left(S(x)\ \&\ P(x)\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\forall x\left((\neg S(x))\ \vee\ (\neg P(x))\right)\right) \rightleftharpoons \left(\forall x\left(S(x)\ \rightarrow\ (\neg P(x))\right)\right)$$

$\neg E \rightleftharpoons I.$ La negación de un Universal Negativo es un Particular Afirmativo

$$\left(\neg\left(\forall x\left(S(x)\ \rightarrow\ (\neg P(x))\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\exists x\left(\neg\left(S(x)\ \rightarrow\ (\neg P(x))\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\exists x\left(S(x)\ \&\ P(x)\right)\right)$$

En la Lógica Aristotélica, entre los tipos de juicios se establecen distintas relaciones de oposición: Contrarios, Contradictorios, Subcontrarios y Subalternos:



Para finalizar esta sección, como un ejemplo más, simbolizaremos una expresión usada con mucha frecuencia:

"**Hay** un **único** individo tal, que ..."

Con lo que tenemos hasta ahora es posible dar una simbolización: Sea α una expresión aceptada en la cual aparece la variable x y no aparecen las variables y y z. Así, la expresión: hay un único individo tal, que cumple la propiedad α, que comunmente se denota por $\exists! x\alpha(x)$ lo podemos simbolizar de almenos dos maneras, obviamente sinónimas, como sigue:

$$
\begin{aligned}
(\exists! x\alpha(x)) \;&\rightleftharpoons\; \Big(\exists x\Big(\alpha(x)\ \&\ \Big(\forall y\Big(\alpha(y) \to (x \approx y)\Big)\Big)\Big)\Big) \\
&\rightleftharpoons\; \Big((\exists x\alpha(x))\ \&\ \Big(\forall y\Big(\forall z\Big(\alpha(y)\ \&\ \alpha(z) \to (y \approx z)\Big)\Big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que la segunda simbolización la podemos leer en dos partes, las que están separadas por la conjunción, la primera afirma que hay *almenos un individuo* que cumple la propiedad α y la segunda afirma que *a lo más un individuo* la cumple.