

Ahora pasemos a dar la definición rigurosa de un lenguaje adecuado para “hablar” de las estructuras elementales.

En lo que sigue, fijemos un tipo de semejanza, digamos ρ .

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \right) \cup \mathcal{C}$$

Definición₁. Un *Lenguaje (Formal de 1er. Orden) de Tipo ρ* , en breve un ρ -Lenguaje, \mathcal{L}_ρ , es un conjunto de símbolos de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho &= \rho && \text{(No-Lógicos)} \\ &\cup \{v_n / n \in \mathbb{N}\} && \text{(Variables)} \\ &\cup \{ \approx \} && \text{(Igualdad)} \\ &\cup \{ \neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} && \text{(Conectivos)} \\ &\cup \{ \forall, \exists \} && \text{(Cuantificadores)} \\ &\cup \{), (, ' \} && \text{(Auxiliares o de Puntuación)} \end{aligned}$$

Con la única condición de que un símbolo **no** es una sucesión finita de otros símbolos.

Recordemos que tenemos la notación,

$$VAR = \{v_n / n \in \mathbb{N}\}$$

Definición₂. e es una *Expresión de Tipo ρ* o una ρ -Expresión si e es una sucesión finita de símbolos de \mathcal{L}_ρ .

Notación: $EXP_\rho = \{e / e \text{ es una } \rho\text{-expresión}\}$
 $= \{e / e \text{ es una sucesión finita de símbolos de } \mathcal{L}_\rho\}$
 $= \{e / \text{hay un } n \in \mathbb{N} \text{ tal, que } e : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{L}_\rho\}$

Definición₂. TRM_ρ es el \subseteq -menor conjunto de ρ -expresiones que:

I) Contiene a las variables y a las constantes:

$$VAR \cup \mathcal{C} \subseteq TRM_\rho \subseteq EXP_\rho$$

II) Es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales:

Si $F \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in TRM_\rho) \in TRM_\rho$$

Notación: A los elementos de TRM_ρ se les llaman *Términos de tipo ρ* o bien, ρ -*Términos*.

Definición₃. FRM_ρ es el \subseteq -menor conjunto de ρ -expresiones que:

I) Contiene a todas las ρ -atómicas:

Si $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$(\tau_1 \approx \tau_2) \in FRM_\rho \quad \text{y} \quad P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in FRM_\rho$$

II) Es cerrado bajo conectivas y cuantificadores:

a) Si $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, entonces

$$(\neg\alpha), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta) \in FRM_\rho$$

b) $\alpha \in FRM_\rho$ y $x \in VAR$, entonces

$$(\forall x \alpha), (\exists x \alpha) \in FRM_\rho$$

Notación: A los elementos de FRM_ρ les llamaremos *Fórmulas (Bien Formadas) de tipo ρ* o ρ -*Fórmulas*.

Ejemplos: ...