Veamos que toda tautología es una universalmente verdadera. Necesitamos el siguiente,

Lema$_5$. Para cada ρ–estructura $\mathfrak{A}$ y cada A–asignación s hay una $\mathbb{B}_\rho$–asignación $v_{\mathfrak{A},s}$ tal, que para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ se tiene,

$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 1$ syss $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ .... $*(\alpha)$

Prueba. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $s \in {}^\omega A$. Definimos $v_{\mathfrak{A},s} : \mathbb{B}_\rho \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\text{Si } A \in \mathbb{B}_\rho, \qquad v_{\mathfrak{A},s}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{A} \models A[s] \\ & \text{o} \\ 0 & \text{si } \mathfrak{A} \not\models A[s] \end{cases}$$

Veamos que la correspondiente $v^*_{\mathfrak{A},s}$ cumple con lo exigido y esto lo haremos por inducción sobre la formación de fórmulas:

I) Sea $A \in \mathbb{B}_\rho$. Probemos que $*(A)$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\mathfrak{A} \models A[s]$. De las definiciónes de $v^*_{\mathfrak{A}s}$ y $v_{\mathfrak{A}s}$, tenemos que

$$v^*_{\mathfrak{A},s}(A) = v_{\mathfrak{A},s}(A) = 1$$

$\Rightarrow]$ Si $\mathfrak{A} \not\models A[s]$, tenemos que $v^*_{\mathfrak{A},s}(A) = v_{\mathfrak{A},s}(A) = 0$ y por la **Observación$_1$**, $v_{\mathfrak{A},s}(A) \neq 1$.

II) Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y supongamos inductivamente que $*(\alpha)$ y $*(\beta)$.

a)	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\neg\alpha) = 1$	syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 0$	3.a)
		syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) \neq 1$	**Observación**$_1$
		syss	$\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$	$*(\alpha)$ (H.I.)
		syss	$\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$	Tarski
b)	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha \to \beta) = 1$	syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 0$ o $v^*_{\mathfrak{A},s}(\beta) = 1$	3.d)
		syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) \neq 1$ o $v^*_{\mathfrak{A},s}(\beta) = 1$	**Observación**$_1$
		syss	$\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$ o $\mathfrak{A} \models \beta[s]$	$*(\alpha)$ y $*(\beta)$ (H.I.)
		syss	$\mathfrak{A} \models (\alpha \to \beta)[s]$	Tarski

dejamos al lector los otros tres casos. Con lo que concluimos que para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, se tiene $*(\alpha)$. †

Proposición$_6$.

a) $\mathcal{T}_\rho \subsetneq \mathcal{UV}_\rho$

b) $\mathcal{C}_\rho \subsetneq \mathcal{UF}_\rho$

Prueba. La no igualdad entre estos conjuntos quedó establecida con los ejemplos dados anteriormente.
a) Procederemos por contrapositiva. Supongamos pues que, $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathcal{UV}_\rho$. Así, hay una $\mathfrak{A}_0 \in V_\rho$ y una $s_0 \in {}^{\omega}A$ tal, que $\mathfrak{A}_0 \nvDash \alpha[s_0]$. Por el lema anterior hay una $\mathbb{B}_\rho$-asignación $v_{\mathfrak{A}_0,s_0}$ tal, que

$$v^*_{\mathfrak{A}_0,s_0}(\alpha) = 1 \text{ syss } \mathfrak{A}_0 \vDash \alpha[s]$$

Como es el caso que $\mathfrak{A}_0 \nvDash \alpha[s_0]$, tenemos que $v^*_{\mathfrak{A}_0}(\alpha) \neq 1$ y por tanto $\alpha \notin \mathcal{T}_\rho$.
b) Si $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$, entonces $(\neg\alpha) \in \mathcal{T}_\rho$ y por el **a**) tenemos, $(\neg\alpha) \in \mathcal{UV}_\rho$ y de aquí que $\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$. †

Es claro que no toda universalmente válidas es una tautología, pero ¿Bajo que condiciones se podría garantizar esto? La respuesta la encontramos bajo la suposición de que la fórmula **no** aparezca el símbolo de igualdad ni tampoco un cuantificador.

Lema$_7$. Para cada $\mathbb{B}_\rho$–asignación v, hay una ρ–estructura $\mathfrak{A}_v$ y una A_v–asignación s_v tales que, para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, en la cual no aparecen los símbolos de igualdad $(\approx)$ ni los cuntificadores $\left(\forall, \exists\right)$, se tiene:

$$\mathfrak{A}_v \vDash \alpha[s_v] \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) = 1$$

Prueba: Sea v una $\mathbb{B}_\rho$-asignación.
Definimos una ρ–estructura $\mathfrak{A}_v$ como sigue:
a). $|\mathfrak{A}_v| = TRM_\rho \rightleftharpoons A_v$.
b). Si $P \in \mathcal{P}_n$, sea $P^{\mathfrak{A}_v} = \left\{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \in A_v^n \ / \ v(P(a_1,\ldots,a_n)) = 1\right\}$.
c). Si $f \in \mathcal{F}_n$, entonces $f^{\mathfrak{A}_v} : A_v^n \to A_v$ dada como sigue:

Si $a_1,\ldots,a_n \in A_v$, $f^{\mathfrak{A}_v}(a_1,\ldots,a_n) = f(a_1,\ldots,a_n)$

d). Si $c \in \mathcal{C}$, sea $c^{\mathfrak{A}_v} = c$.
También definimos s_v, una A_v-asignación, como: $s_v = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots\rangle$; es decir:

$$s_v : \mathbb{N} \to A_v$$
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad s_v(i) = v_i$$

Af. Para cualquier ρ–término τ, se tiene:

$$\tau^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = \tau$$

Esto lo podemos ver por inducción sobre la formación de términos:
i). $v_i^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = s_v(i) = v_i$ y $c^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = c$.
ii). Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n$ son ρ–términos, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f(\tau_1,\ldots,\tau_n)^{\mathfrak{A}_v}[s_v] &= f^{\mathfrak{A}_v}(\tau_1^{\mathfrak{A}_v}[s_v],\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}[s_v]) && \text{def. de interpretación}\\
&= f^{\mathfrak{A}_v}(\tau_1,\ldots,\tau_n) && \text{H.I.}\\
&= f(\tau_1,\ldots,\tau_n) && \text{def. de } f.
\end{aligned}
$$

Pasemos ahora a la prueba del **Lema**. Lo que tenemos que probar es que:
Para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, en la cual no aparecen los símbolos $\approx, \forall, \exists$, se tiene:

$\mathfrak{A}_v \models \alpha[s_v]$ syss $v^*(\alpha) = 1$ ....**(α)

Y esto lo haremos por inducción sobre la formación de fórmulas.

I] Sea α una fórmula atómica, en la cual no aparece el símbolo $\approx$. Así $\alpha \rightleftharpoons P(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n$ son ρ–términos.

$\mathfrak{A}_v \models P(\tau_1,\ldots,\tau_n)[s_v]$	syss	$\langle\tau_1^{\mathfrak{A}_v}[s_v],\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}[s_v]\rangle \in P^{\mathfrak{A}_v}$	Tarski
	syss	$\langle\tau_1^{\mathfrak{A}_v},\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}\rangle \in P^{\mathfrak{A}_v}$	**Af**.
	syss	$v(P(\tau_1,\ldots,\tau_n)) = 1$	def. de $P^{\mathfrak{A}_v}$
	syss	$v^*(P(\tau_1,\ldots,\tau_n)) = 1$	$P(\tau_1,\ldots,\tau_n) \in \mathbb{B}_\rho$ y $v^* \upharpoonright \mathbb{B}_\rho = v$

II] Sean β y γ fórmulas en las cuales no aparecen los símbolos $\approx, \forall, \exists$ y que cumplen, inductivamente, con **(β) y **(γ). Así,

$\mathfrak{A}_v \models \neg\beta[s_v]$	syss	$\mathfrak{A}_v \not\models \beta[s_v]$	Tarski
	syss	$v^*(\beta) \neq 1$	**(β)
	syss	$v^*(\neg\beta) = 1$	prop. de v^*

y

$\mathfrak{A}_v \models (\beta \,\&\, \gamma)[s_v]$	syss	$\mathfrak{A}_v \models \beta[s_v]$ y $\mathfrak{A}_v \models \gamma[s_v]$	Tarski
	syss	$v^*(\beta) = 1$ y $v^*(\gamma) = 1$	**(β) y **(γ)
	syss	$v^*(\beta \,\&\, \gamma) = 1$	prop. de v^*

en forma similar se prueba para los conectivos $\vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$. †

Proposición$_8$. Sea α una fórmula en la cual no aparecen los símbolos $\approx$, $\forall$, $\exists$. Así,

Si α es una Universalmente Verdadera, entonces α es una Tautología.

Prueba: Lo haremos por contrapositiva. Supongamos pues que α no es una tautología. Por lo que hay una $\mathbb{B}_\rho$-asignación, digamos v_0, tal que $v_0(\alpha) \neq 1$. Por el Lema anterior hay una estructura $\mathfrak{A}_{v_0}$ y una A_{v_0}-asignación s_{v_0} tales que

$$\mathfrak{A}_{v_0} \not\models \alpha[s_{v_0}]$$

y por tanto α no es una fórmula universalmente verdadera. †