

Equivalencia e Implicación Lógica

Definición. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

I) α es Lógicamente Equivalente a β syss $\dot{\forall} v \in \mathbb{B}^2 [v^*(\alpha) = v^*(\beta)]$

Notación: $\alpha \equiv \beta$. En caso contrario $\alpha \not\equiv \beta$

II) α Implica Lógicamente a β syss $\dot{\forall} v \in \mathbb{B}^2 [\text{Si } v^*(\alpha) = 1, \text{ entonces } v^*(\beta) = 1]$

Notación: $\alpha \models \beta$. En caso contrario $\alpha \not\models \beta$

El método de las tablas de verdad nos permite decidir si dos fórmulas son lógicamente equivalentes o no lo son, o si una implica lógicamente a la otra o no.

Ejemplos: Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y $A, B \in \mathbb{B}_\rho$.

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$
2. $(A \rightarrow B) \not\equiv (B \rightarrow A)$. Tomar $v \in \mathbb{B}_\rho^2$ tal, que $v(A) = 1$ y $v(B) = 0$
3. $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (Contrapositiva)
4. $(\alpha \& \beta) \models (\alpha \vee \beta)$
5. $(A \vee B) \not\models (A \& B)$. Tomar $v \in \mathbb{B}_\rho^2$ tal, que $v(A) \neq v(B)$
6. Para cualquier γ se tiene,
 - a. $\gamma \models (A \vee \neg A)$
 - b. $(A \& \neg A) \models \gamma$

No hay que confundir el bicondicional con la relación de equivalencia lógica. El bicondicional (\leftrightarrow) es un símbolo del lenguaje objeto, es un conectivo, mientras que el símbolo \equiv se encuentra en el metalenguaje, es un meta-símbolo. Por un lado, tenemos que $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una fórmula, una sucesión finita de símbolos del lenguaje formal (un objeto, de hecho, una \mathbb{B} -expresión) y no es una proposición (no se puede calificar ni de verdadero ni de falso), en cambio, $\alpha \equiv \beta$ no es una fórmula, es una proposición en el metalenguaje, la cual afirma que α es lógicamente equivalente a β .

Así si, por ejemplo, $A, B \in \mathbb{B}$, la fórmula $(A \leftrightarrow B)$ *persé* no es ni verdadera ni falsa; puede tomar el valor de verdad de 1 con algunas \mathbb{B} -asignaciones y el de 0 bajo otras; en cambio podemos afirmar que A y B **no** son lógicamente equivalentes, $A \not\equiv B$, pues podemos dar una \mathbb{B} -asignación v tal que $v^*(A) = 1$ y $v^*(B) = 0$.

Algo similar ocurre entre la implicación lógica (\models) y el condicional (\rightarrow). No hay que

confundirlos.

A pesar de ser diferentes hay una estrecha relación entre estos.

Proposición₀. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

- a) $\alpha \equiv \beta \text{ syss } (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$
- b) $\alpha \models \beta \text{ syss } (\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$

Prueba: Ejercicio. †

La relación entre la equivalencia y la implicación lógicas queda establecida en la siguiente,

Proposición₀₀. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

- a) Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\alpha \models \beta$ pero no necesariamente se tiene la conversa.
- b) $\alpha \equiv \beta \text{ syss } \alpha \models \beta \text{ y } \beta \models \alpha$

Prueba: Ejercicio. †

Las nociones de Implicación y Equivalencia Lógica adquieren particular importancia debido a que nos abren las puertas para tener métodos de prueba.

Esto lo podemos ver para la equivalencia lógica de la siguiente manera: En primer lugar, sabemos que toda tautología es una verdad universal, por lo que si $\alpha \equiv \beta$ tendríamos, por Tarski, que

$$\dot{\forall} \mathfrak{A} \in V_{\rho} \left[\mathfrak{A} \models \alpha \text{ syss } \mathfrak{A} \models \beta \right]$$

Por tanto, si quisieramos probar que algún enunciado (digamos α) es verdadero, en algún determinado universo (digamos \mathfrak{A}), bastaría encontrar otro enunciado (digamos β) que fuera lógicamente equivalente a él ($\alpha \equiv \beta$) y probar que este último (β) es verdadero (en \mathfrak{A}).

De hecho, todo esto es mucho pedir; sería suficiente con tener que $\alpha \models \beta$.

Pasemos ahora a dar algunas propiedades básicas de éstas nuevas nociones.

Proposición₁. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi(\mathbb{B})$.

- l) a). $\alpha \equiv \alpha$
- b). Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\beta \equiv \alpha$
- c). Si $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \gamma$, entonces $\alpha \equiv \gamma$

La relación \equiv es de equivalencia sobre $\Phi(\mathbb{B})$.

- II) a). $\alpha \models \alpha$
 b). Hay α y β tales que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ y sin embargo $\alpha \neq \beta$
 c). Si $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$

La relación \models , **no** establece un orden parcial (reflexivo) en $\Phi(\mathbb{B})$, solo un preorden.

Prueba: Ejercicio.

†

Un par de ejemplos que necesitamos son,

7. Leyes asociativas de la conjunción y la disyunción.

- i. $(\alpha \& (\beta \& \gamma)) \equiv ((\alpha \& \beta) \& \gamma)$
 ii. $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$

Pasemos ahora a una,

Conversión sobre el uso de paréntesis

1. Los paréntesis externos, se pueden suprimir.
2. Los paréntesis en torno a la negación se pueden omitir.
3. Las leyes asociativas de la conjunción y la disyunción, nos permiten omitir los paréntesis cuando se tiene una sucesión de éstas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (A \& \neg B) \& (C \& D) &\Leftrightarrow A \& \neg B \& C \& D \\ A \vee (B \vee (\neg C \vee D)) &\Leftrightarrow A \vee B \vee \neg C \vee D \\ (A \rightarrow \neg B) \& (B \& (C \vee \neg D)) &\Leftrightarrow (A \rightarrow \neg B) \& B \& (C \vee \neg D) \\ A \rightarrow (\neg B \vee (A \vee (C \& D))) &\Leftrightarrow A \rightarrow (\neg B \vee A \vee (C \& D)) \end{aligned}$$

4. La conjunción y la disyunción *ligan* más que el condicional y el bicondicional. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (A \& B) \rightarrow C &\Leftrightarrow A \& B \rightarrow C \\ A \leftrightarrow (C \vee D) &\Leftrightarrow A \leftrightarrow C \vee D \\ (A \& B) \rightarrow (C \vee D) &\Leftrightarrow A \& B \rightarrow C \vee D \\ A \vee (B \leftrightarrow (C \& D)) &\Leftrightarrow A \vee (B \leftrightarrow C \& D) \end{aligned}$$

5. Algunas veces utilizaremos los paréntesis cuadrados:] y [

Más ejemplos:

8. $(A \& B) \vee C \neq A \& (B \vee C)$
9. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ (Ley asociativa para el bicondicional)
10. ¿ $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) \in T$?
11. ¿ $A \& B \rightarrow C \models (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$?
12.
 - i. ¿ $A \vee B \rightarrow C \models (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$?
 - ii. ¿ $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) \models A \vee B \rightarrow C$?
13. $(A \& \neg B) \vee (B \& \neg A) \equiv (A \vee B) \& \neg(A \& B)$ (Corresponde al "o" exclusivo)
14. $(A \vee B) \& \neg B \models A$ (Ley del perro o Silogismo Disyuntivo)
15.
 - i. $(A \rightarrow B) \& B \neq A$
 - ii. $(A \rightarrow B) \& A \models B$ (Modus Ponens)
16. $(A \rightarrow B) \& \neg B \models \neg A$ (Modus Tolens)
17. Ver las Tablas de las Tautologías.