Consecuencia Lógica

Desde un punto de vista lógico, un argumento no es más que una sucesión (finita) de premisas o hipótesis y una conclusión.

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

Un argumento es correcto si la conclusión es consecuencia, si se sigue, de las premisas; en otro caso el argumento es incorrecto. En lógica nos limitamos al estudio de los argumentos desde la perspectiva de su corrección.

La relación de consecuencia, es decir, la relación que se da entre las premisas y la conclusión de un argumento correcto, no es relativa, no varía de un sujeto a otro: un argumento es correcto o no lo es; otra cosa es que sepamos si lo es.

Hemos dicho que un argumento es correcto si su conclusión se sigue, o es consecuencia, de sus premisas. Si bien no hay duda de que sabemos reconocer ciertos argumentos correctos como tales, también es cierto que nos veríamos en serias dificultades para explicar qué queremos decir, en general, cuando decimos que la conclusión de un argumento correcto se sigue de sus premisas.

Una de las características esenciales de los argumentos correctos es que si las premisas son verdaderas, la conclusión también será verdadera. Y de aquí que si la conclusión de un argumento correcto es falsa, por lo menos una de las hipótesis es falsa. Podemos decir, en lenguaje coloquial, que los argumentos correctos trasmiten o heredan la verdad de las premisas a la conclusión.

La lógica proposicional (lógica de los conectivos) retoma esta característica como punto de partida para definir lo que es un argumento correcto bajo el nombre de *Consecuencia Lógica.* Para nosotros repercute en generalizar la noción de implicación lógica, generalización que haremos no solo para un número finito de hipótesis, sino para un conjunto arbitrario de $\mathbb{B}_\rho$–fórmulas.

Definición. Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$.

1). **a**). Sea $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$. Diremos que v *Satisface* a α syss $v^*(\alpha) = 1$.

b). Diremos que α es *Satisfacible* syss
hay una asignación de valores de verdad a los bloques, que satisface a α.

2). **a**). Sea $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2.$ Diremos que v *Satisface* a Σ syss v satisface a toda $\alpha \in \Sigma$

b). Diremos que Σ es *Satisfacible* syss
hay una asignación de valores de verdad a los bloques, que satisface a Σ.

Ejemplos:

1) $\emptyset$ es satisfacible por cualquier asignación

2) $\mathbb{B}_\rho$ es satisfacible

3) $\{A, \neg A\}$ y $\{A \ \& \ \neg A\}$ no son satisfacibles

4) $\{A \rightarrow B\}$ es satisfacible

5) $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$ no es satisfacible

6) $\{A \vee \neg A\}$ es satisfacible

Prueba: **Ejercicio.** †

Definición. Sea $\Sigma \cup \{\beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Diremos que β es *Consecuencia (Lógica) de* Σ, $\Sigma \vDash \beta$ syss toda asignación que satisface a Σ, satisface a β. En símbolos:

$$\Sigma \vDash \beta \text{ syss } \dot{\forall}\ v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2 \left[\dot{\forall}\ \alpha \in \Sigma(v^*(\alpha) = 1) \Rightarrow v^*(\beta) = 1 \right]$$

Los elementos de Σ se llaman *Hipótesis* y β se llama *Conclusión.*

Proposición$_1$. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$.

1) $\emptyset \vDash \beta$ syss $\beta \in \mathcal{T}_\rho$

2) $\{\alpha\} \vDash \beta$ syss $\alpha \vDash \beta$

Prueba: Es inmediata de la definición. †

Esto último sugiere la siguiente,

Notación.

1) $\vDash \beta \quad \rightleftharpoons \quad \beta \in \mathcal{T}_\rho$

2) Si $\Sigma \cup \{\beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y Σ es finito digamos $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, escribiremos

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta \quad \rightleftharpoons \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$$

Pasemos a ver algunas propiedades básicas.

Proposición$_2$. Sea $\Gamma \cup \Sigma \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$.

1. **a**). $\alpha \vDash \alpha$

b). Si $\alpha \in \Sigma$, entonces $\Sigma \vDash \alpha$

2. Monotonía.

a). Si $\alpha \vDash \beta$ entonces $\alpha, \gamma \vDash \beta$

b). Si $\Sigma \vDash \beta$ y $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma \vDash \beta$

3. Transitividad.

a). Si $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$

b). Si $\Sigma \models \beta$ y $\beta \models \gamma$, entonces $\Sigma \models \gamma$

c). Si para toda $\gamma \in \Gamma$, $\Sigma \models \gamma$ y además $\Gamma \models \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$

4. **a**). $\alpha \models \beta$ syss $\models \alpha \to \beta$

b). $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ syss $\Sigma \models \alpha \to \beta$

Versión semántica del Metateorema de la Deducción.

c). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ syss $\models (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\ldots \to (\alpha_n \to \beta)\ldots)))$

5. **a**). $\alpha,\ \beta \models \alpha\ \&\ \beta$

b). $\alpha,\ \beta \models \gamma$ syss $(\alpha\ \&\ \beta) \models \gamma$ syss $\models (\alpha\ \&\ \beta) \to \gamma$

c). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ syss $\models (\alpha_1\ \&\ \alpha_2 \ldots \&\ \alpha_n) \to \beta$

Prueba: **Ejercicio**. †

A continuación veamos algunas propiedades de la consecuencia lógica que nos servirán como ejemplos de argumentos correctos.

Proposición$_3$. Sea $\Sigma \cup \left\{\alpha,\ \beta\right\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, así,

1. Modus Ponens

a). $\alpha,\ \alpha \to \beta \models \beta.$

b). Si $\models \alpha$ y $\models \alpha \to \beta$, entonces $\models \beta$.

c). Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \alpha \to \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$.

2. Modus Tollens

a). $\alpha \to \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$

b). Si $\models \alpha \to \beta$ y $\models \neg\beta$ entonces $\models \neg\alpha$

c). Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \alpha \to \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$.

Prueba: **Ejercicio**. †

Una regla de inferencia es o será una "buena regla", si la conclusión es una consecuencia lógica de las hipótesis. La regla *Modus Ponens* es una "buena regla":

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \to \beta \\ \hline \beta \end{array}$$

Veamos otras propiedades.

Proposición$_4$. Sea $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

1. $\models \beta$ syss $\dot\forall\ \alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, $\alpha \models \beta$

2. $\models \beta$ syss $\dot\forall\ \Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B})$, $\Sigma \models \beta$

Prueba: La parte **1**. se sigue de **2**.

$\Rightarrow\Big]$ Si β es una tautología, entonces cualquier $\mathbb{B}_\rho$–asignación que se dé, en particular a una que satisfaga a un conjunto determinado de fórmulas, satisfacerá a β.

$\Leftarrow\Big]$ En particular se tiene, $A \vee \neg A \models \beta$. Por tanto, cualquier asignación que demos, al satisfacer a esta hipótesis, satisface a β. †

Proposición$_5$. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

1. $\alpha, \neg\alpha \models \beta$ cualquiera sea $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y

2. α es una contradicción syss $\alpha \models \beta$ para cualquier $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$.

Prueba: Sólo probaremos **2**. La primera parte se hará por contrapositiva y la otra por reducción a lo absurdo.

$\Rightarrow\Big]$ Si para algún β se tiene que $\alpha \not\models \beta$, entonces hay una asignación que satisface a α pero no así a β. En tal caso, α no es una contradicción.

$\Leftarrow\Big]$ Tenemos como caso particular, $\alpha \models A\ \&\ \neg A$. Entonces cualquier asignación que satisfaciera a α tendría que satisfacer a $(A\ \&\ \neg A)$, por lo que α no es satisfacible.
†

Corolario$_6$. Sea $\gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

γ es Contingente syss $\dot\exists\ \alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)\left[\alpha \not\models \gamma\right]$ y $\dot\exists\ \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)\left[\gamma \not\models \beta\right]$

Sabemos que la equivalencia lógica está caracterizada por la doble implicación lógica, también la podemos caracterizar por tener las mismas consecuencias lógicas.

Proposición$_7$. Para $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ se tiene que,

1. $\alpha \equiv \beta$ syss $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$

2. $\alpha \equiv \beta$ syss $\dot\forall\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, $\alpha \models \gamma$ syss $\beta \models \gamma$

Prueba: Solo falta probar **2**.

$\Rightarrow\Big]$ Supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Así, tenemos que $\alpha \models \beta$ y que $\beta \models \alpha$. Ahora consideremos a $\gamma \in \Phi(\mathbb{B})$. Si fuera el caso en que $\alpha \models \gamma$, por la transitividad de la implicación lógica, tendríamos que $\beta \models \gamma$. Análogamente, si $\beta \models \gamma$, tendríamos que

$\alpha \models \gamma$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que para cualquier $\gamma \in \Phi(\mathbb{B})$, se tiene que $\alpha \models \gamma$ syss $\beta \models \gamma$. Ahora bien, como $\alpha \models \alpha$, tenemos que $\beta \models \alpha$ y como $\beta \models \beta$ también tenemos que $\alpha \models \beta$. Concretando, $\alpha \equiv \beta$. †

La siguiente propiedad nos da una caracterización de para la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas.

Proposición$_8$. Sea $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

1. Σ es satisfacible syss hay una $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ tal, que $\Sigma \not\models \beta$.

O, equivalentemente,

2. $\Sigma \models \beta$, para toda $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ syss Σ no es satisfacible

Prueba: Si Σ es satisfacible, entonces ninguna contradicción es consecuencia lógica de él –p.e. $(A \ \& \ \neg A)$. Otro ejemplo, si $\alpha \in \Sigma$, se tiene que $\Sigma \not\models \neg\alpha$ (aquí se necesita que $\Sigma \neq \emptyset$). Otro más, si se tiene que $\Sigma \models \beta$, por ser Σ satisfacible, entonces $\Sigma \not\models \neg\beta$. El "regreso" es inmediato de la definición de $\models$. †

Una última propiedad de la consecuencia lógica, que veremos en esta sección y que nos será de gran utilidad para más adelante es,

Proposición$_9$. Sea $\Sigma \cup \{\beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

1. $\Sigma \not\models \beta$ syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es satisfacible.

O, equivalentemente,

2. $\Sigma \models \beta$ syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ no es satisfacible.

Prueba:

$\Sigma \not\models \beta$	syss	$\dot{\exists}\, v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2\,[v$ satisface a Σ y $v^*(\beta) \neq 1]$	Def. de $\models$
	syss	$\dot{\exists}\, v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2\,[v$ satisface a Σ y $v^*(\neg\beta) = 1]$	Propd. de v
	syss	$\dot{\exists}\, v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2\,[v$ satisface a $\Sigma \cup \{\neg\beta\}]$	
	syss	$\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es satisfacible	Def. de *Sat* †

Dos resultados importantes, que no podemos dejar de mencionar, quedan

PENDIENTES:

METATEOREMA DE FINITUD SEMÁNTICO:
Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Si $\Sigma \vDash \alpha$, entonces Σ tiene un subconjunto finito, digamos Γ, tal que $\Gamma \vDash \alpha$.

METATEOREMA DE COMPACIDAD:
Si Σ es un conjunto de fórmulas tal, que todo subconjunto finito es satisfacible, entonces él mismo, Σ, es satisfacible.

Solo comentaremos que estos resultados son equivalentes, es decir, se puede probar uno a partir del otro. Nosotros, más adelante, probaremos el metateorema de compacidad y de ahí desprenderemos el de finitud.