FORMAS NORMALES

Teniendo a la mano la noción de Equivalencia Lógica y los Metateoremas de sustitución podemos contestar, primeramente, una pregunta que dejamos pendiente. Vimos que a toda fórmula le corresponde una (en realidad varias, dependiendo del arreglo de las letras proposicionales) función veritativa.

Ahora nos preguntamos ¿Toda función veritativa es la tabla de verdad de alguna fórmula? La respuesta es sí. Obviamente no es única ya que cualquier otra fórmula lógicamente equivalente tendrá la misma tabla.

Hay 4 funciones veritativas de aridad 1, veamos:

V	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

A éstas es fácil ver qué formula les correspoden como tablas. Sea $A \in \mathbb{B}$, así

	f_1	f_2	f_3	f_4
A	$(A \vee \neg A)$	A	$(\neg A)$	$(A \ \& \ \neg A)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Funciones veritativas de aridad 2 son en total 16,

^2V		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Aquí ya no es tan fácil. La segunda mitad, de f_9 a f_{16}, se corresponden con las negaciones de la otra mitad. Bastaría encontrar las primeras, f_1 a f_8. Sean $A,\ B \in \mathbb{B}$,

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
A	B	$(A \vee \neg A)\ \&\ (B \vee \neg B)$	$A \vee B$	?	?	$A \to B$	?	$A \leftrightarrow B$	$A\ \&\ B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

¿Cómo podríamos encontrar una fórmula cuya tabla fuera, por ejemplo, f_6? Especificamente ¿cómo construimos una fórmula, digamos α, cuyas únicas letras proposicionales sean A y B, y tabla de verdad es f_6, es decir $T_\alpha = f_6$? (Tabla (a))

Lo que se ocurre es separar en dos fórmulas –dos tablas (Tabla (b))– de tal suerte que la disyunción de ellas nos dé la original, digamos $\alpha \rightleftharpoons (\beta_1 \vee \beta_2)$.

			f_6	
A	B		¿ α ?	
1	1		1	
1	0		0	
0	1		1	
0	0		0	

Tabla (a)

						α
A	B		β_1		β_2	$(\beta_1 \vee \beta_2)$
1	1		1		0	1
1	0		0		0	0
0	1		0		1	1
0	0		0		0	0

Tabla (b)

Con esto hemos lo reducido a encontrar a β_1 y a β_2. Y esto es más sencillo; tomemos ahora a $\beta_1 \rightleftharpoons (A\ \&\ B)$, pues $v(A) = 1$ y $v(B) = 1$ syss $v(A\ \&\ B) = 1$ y por otro lado, tomamos a $\beta_2 \rightleftharpoons (\neg A\ \&\ B)$ pues, $v(A) = 0$ y $v(B) = 1$ syss $v(\neg A) = 1$ y $v(B) = 1$ y esto ocurre syss $v^*(\neg A\ \&\ B) = 1$.

Concretando, si tomamos a $\alpha \rightleftharpoons (A\ \&\ B) \vee (\neg A\ \&\ B)$, entoces $T_\alpha = f_6$.

Usando lo aprendido aqui, vemos que a f_4 le podemos corresponder la fórmula $\beta \rightleftharpoons (A\ \&\ B) \vee (A\ \&\ \neg B)$. Podemos enunciar este proceder en la prueba de la siguiente,

Proposición₁. Si g es una función veritativa de aridad n, entonces hay una $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, con exactamente n letras proposicionales, la cual tiene como tabla de verdad a α, en símbolos, $T_\alpha = g$.
Prueba. Sea $g\ :\ {}^nV \to V$. Fijemos $A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n \in \mathbb{B}$. Tenemos 2 casos:

a). Si g es la función constante 0 :
Sea α la fórmula

$$(A_1 \ \& \ \neg A_1) \vee \ldots \vee (A_j \ \& \ \neg A_j) \vee \ldots \vee (A_n \ \& \ \neg A_n)$$

no es dificil verificar que T_α es la función constante 0.

b). Si g tiene al menos un valor (un renglón) en el cual toma el valor de 1 :
Consideremos $s^1, \ldots, s^i, \ldots, s^k$ una enumeración de **todos** los renglones, tales que $g(s^i) = 1$, con $s^i = \langle s^i_1, \ldots, s^i_j, \ldots, s^i_n \rangle \in {}^nV.$ Siendo congruentes con nuestra notación tenemos que $1 \leq j \leq n$, que $1 \leq k \leq 2^n$ y que $1 \leq i \leq k.$ La tabla tendría el siguiente aspecto,

	A_1	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_n		g
							0
							$\vdots$
							0
s^1	s^1_1	$\cdots$	s^1_j	$\cdots$	s^1_n		1
							0
							$\vdots$
							0
s^i	s^i_1	$\cdots$	s^i_j	$\cdots$	s^i_n		1
							0
							$\vdots$
							0
s^k	s^k_1	$\cdots$	s^k_j	$\cdots$	s^k_n		1
							0
							$\vdots$
							0

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k \in \Phi(\mathbb{B})$ tales, que para cada i se tiene,

$$\alpha_i \rightleftharpoons (\beta^i_1 \ \& \ldots \& \ \beta^i_j \ \& \ldots \& \ \beta^i_n)$$

donde, para cada j se tiene que,

$$\beta^i_j = \begin{cases} A_j & \text{si } s^i_j = 1 \\ \neg A_j & \text{si } s^i_j = 0 \end{cases}$$

Finalmente, sea

$$\alpha \rightleftharpoons \left(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_i \vee \ldots \vee \alpha_k\right)$$

Así, $T_\alpha = g.$ †

Los únicos conectivos que utilizamos en la construcción de la fórmula son la conjunción, $\&$, la diyunción, $\vee$, y la negación, $\neg$. Hay que observar que la negación solo va aplicada a las letras proposicionales, o mejor dicho, a los bloques.

Por otro lado, si tenemos una fórmula cualquiera y nos fijamos en su tabla, puesto que le correspode una función veritativa podemos, gracias a la proposición anterior, encontrar otra fórmula lógicamente equivalente a ella, con las características antes mencionadas. Con esto podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición$_2$. Toda fórmula es lógicamente equivalente a una que tiene las mismas letras proposicionales, cuyas únicas conectivas son la negación, la diyunción y la conjunción, y tal que las negaciónes sólo afectan a las letras proposicionales.

Nos interesa considerar como caso particular aquellas $\mathbb{B}$–fórmulas en las cuales los únicos conectivos que aparecen en ellas –obviamente, sin considerar los que intervienen dentro de los bloques– sean $\&$, $\neg$ y $\vee$. Éstas se pueden ver como construidas apartir de $\mathbb{B}$ y solamente usando dichos conectivos.

Definición Recursiva de *Fórmula Booleana* o *Forma Normal:*

I). Todo bloque, $A \in \mathbb{B}$, es *una Fórmula Booleana*

II). Si α y β son fórmulas booleanas, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \ \& \ \beta)$ y $(\alpha \vee \beta)$ son *Fórmulas Booleanas.*

Dicho de forma conjuntista, el conjunto de fórmulas boolenas es el $\subseteq$–menor $\mathbb{B}$–$\left\{Neg, Conj, Disy\right\}$–Inductivo, sobre EXP_ρ.

Dentro de las fórmulas booleanas queremos distinguir aquellas que son disyunciones de conjunciones de bloques o negación de estos.

Definición. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$. Diremos que α *es una (o está escrita en) Forma Normal Disyuntiva* (FND) syss hay $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \in \Phi(\mathbb{B})$ tales que:

i). $\alpha \rightleftharpoons \left(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_i \vee \ldots \vee \alpha_n\right)$ y

ii). Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, hay $\beta^i_1, \ldots, \beta^i_j, \ldots, \beta^i_m \in \Phi(\mathbb{B})$ tales que

a). $\alpha_i \rightleftharpoons (\beta^i_1 \ \& \ldots \& \ \beta^i_j \ \& \ldots \& \ \beta^i_m)$ y

b). Para cada i,j, se tiene que β^i_j es un bloque o la negación de un bloque.

Con esta notación podemos reformular nuestras proposiciones anteriores:

Proposición$_3$. Si g es una función veritativa de aridad n, entonces hay una $\mathbb{B}$–fórmula α escrita en forma normal disyuntiva con exactamente n letras proposicionales tal que $T_\alpha = g$.

Proposición$_4$. Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra escrita en forma normal disyuntiva y que tiene las mismas letras proposicionales.

Tambien se podría tener la forma *dual* de FND e.d. se puede definir aquellas que son conjunciónes de disyunciones de bloques o negación de éstos. A las cuales llamaremos *Formas Normales Conjuntivas (FNC).* Y por supuesto se tiene el correspondiente resultado.