Conjunto Mínimo de Conectivos

Sea $\mathbb{C} = \{\neg\,,\ \&\ ,\ \vee\ ,\ \to\ ,\ \leftrightarrow\}$ y si $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, pondremos

$$\mathbb{C}(\alpha) = \{\diamond \in \mathbb{C}\ /\ \diamond \text{ aparece en } \alpha\}$$

Definición₁. Sea $\mathbb{D}$ un conjunto de conectivos, es decir $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$. Diremos que $\mathbb{D}$ es un *Conjunto Completo o Suficiente de Conectivos* syss para cada $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, hay una $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$ tal, que

1. $\alpha \equiv \beta$
2. $\mathbb{B}(\beta) = \mathbb{B}(\alpha)$ y
3. $\mathbb{C}(\beta) \subseteq \mathbb{D}$

Sabemos que $\{\neg\,,\ \&\ ,\ \vee\}$ forma un conjunto completo de conectivos (toda fórmula tiene una FND o una FNC, lógicamente equivalente a ella y con las mismas letras proposicionales). Pero podemos considerar menos número de conectivos,

Proposición₁. Los conjuntos $\{\neg\,,\ \&\}$, $\{\neg\,,\ \vee\}$ son conjuntos completos de conectivos.

Prueba: Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$. Consideremos una FND lógicamente equivalente a α, digamos α'.

Ahora, usando los metateoremas de sustitución y los siguientes hechos:

$$\gamma \vee \delta \ \equiv\ \neg(\neg\gamma\ \&\ \neg\delta) \qquad \text{y} \qquad \gamma\ \&\ \delta \ \equiv\ \neg(\neg\gamma \vee \neg\delta)$$

Podemos obtener una fórmula lógicamente equivalente a α', digamos β, la cual está construida sólamente con los conectivos exigidos. Finalmente, $\alpha \equiv \beta$. †

¿Se puede considerar menos de éstos? La respuesta es no.

Proposición₂. Los conjuntos de conectivos $\{\neg\}$, $\{\ \&\ \}$, $\{\vee\}$ no son completos.

Prueba: **TAREA**. †

Esto motiva la siguiente,

Definición₂. Sea $\mathbb{D}$ un conjunto de conectivos, es decir, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$. Diremos que $\mathbb{D}$ es un *Conjunto Mínimo de Conectivos,* abreviado como CMC, syss

i). $\mathbb{D}$ es un conjunto completo de conectivos, y

ii). (Minimalidad)

Si $\mathbb{D}' \subsetneq \mathbb{D}$, entonces $\mathbb{D}'$ no cumple cumple con **i**).

Con esta notación $\{\neg,\ \&\ \}$ y $\{\neg,\ \vee\ \}$ son CMC. ¿Hay otros CMC?

Proposición$_3$. El conjunto $\{\neg,\ \rightarrow\ \}$ es un CMC.

Prueba: Una prueba similar a la dada en la proposición anterior, pero usando los hechos:

$$\gamma \vee \delta \ \equiv\ \neg\gamma \rightarrow \delta \qquad \text{y} \qquad \gamma\ \&\ \delta \ \equiv\ \neg(\gamma \rightarrow \neg\delta)$$

Con esto tenemos la suficiencia. La minimalidad se deja al lector. †

Tarea. Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. Los conjuntos de conectivos $\{\ \rightarrow\ \}$, $\{\ \leftrightarrow\ \}$ no son suficientes (completod).

2. $\{\neg,\ \leftrightarrow\ \}$ no es un CMC.

3. Cualquier conectivo ternario es expresable en términos de conectivos binarios y la negación. ¿Qué concluyes con este hecho?

¿Habrá una función veritativa de aridad 2 que por sí sola pueda expresar cualquier fórmula? o dicho de otra manera ¿Hay un conectivo binario que el forme por si solo un CMC?

La respuesta es **sí**. De hecho hay dos.

Definición$_3$. Sean $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B})$. Los valores de verdad que toman los conectivos binarios $\downarrow$ y $|$,quedan definidos por la siguiente tabla:

α	β	$(\alpha \downarrow \beta)$	$(\alpha \mid \beta)$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Para darnos una idea de como trabajan estos, veamos alguna equivalencias lógicas.

Proposición$_4$. Sean $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B})$. Las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes:

1. **i**). $\alpha \downarrow \beta$

ii). $(\neg\alpha)\ \&\ (\neg\beta)\quad \left(FNC \right)$

iii). $\neg(\alpha \vee \beta)$

Debido a **1**.**ii**) se debe el nombre de *Ni* al conectivo ↓ y por **iii**), también se le da el nombre de *NOR*.

2. **i**). $\alpha \mid \beta$

ii). $(\neg\alpha) \vee (\neg\beta)\quad \left(FND \right)$

iii). $\neg(\alpha\ \&\ \beta)$

A esto último se debe que a la conectiva | se le llame *NAND* y por **2**.**ii**) también se le da el nombre de *Negación Alternativa*. Otro nombre que se le da es *Barra* o *Ralla de Sheffer.*

Proposición$_5$. Los conjuntos $\{\ \downarrow\ \}$ y $\{\ \mid\ \}$ son CMC.

Prueba: Basta ver la suficiencia y esta la obtenemos de los siguientes hechos:

$$\downarrow\Big]\qquad \begin{aligned} \neg\alpha &\equiv \alpha \downarrow \alpha \\ \alpha\ \&\ \beta &\equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta) \\ \alpha \vee \beta &\equiv (\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta) \end{aligned}$$

$$\mid\Big]\qquad \begin{aligned} \neg\alpha &\equiv \alpha \mid \alpha \\ \alpha\ \&\ \beta &\equiv \big(\alpha \mid \beta\big) \mid \big(\alpha \mid \beta\big) \\ \alpha \vee \beta &\equiv \big(\alpha \mid \alpha\big) \mid \big(\beta \mid \beta\big) \end{aligned}$$

†

¿Habrá otros conectivos binarios que por sí solos sean suficientes?

Consideremos un conectivo binario, digamos $*$ y supongamos que $\{\ *\ \}$ es suficiente. La pregunta que tenemos que responder es, dada v, una asignación de valores de verdad a los bloques y si $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ ¿Qué valor de verdad toma la fórmula $(\alpha * \beta)$? es decir,

$$v^*(\alpha * \beta) = \ ?$$

ésta debe estar en función de los valores tomados por α y por β.

α	β	$\alpha * \beta$
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	?

Ahora bien, **NO** puede ser el caso:

α	β	$\alpha * \beta$
1	1	1

Pues, no podríamos expresar la negación:

P	$P * P$	$\neg P$
1	1	0

Por lo que:

α	β	$\alpha * \beta$
1	1	0

En forma análoga, concluimos que tenemos el siguiente caso:

α	β	$\alpha * \beta$
0	0	1

Por lo tanto, $*$ tiene como tabla algunas de las siguientes:

α	β		f_1	f_2	f_3	f_4
1	1		0	0	0	0
1	0		0	0	1	1
0	1		0	1	0	1
0	0		1	1	1	1

Reconocemos a $f_1 \leftrightharpoons (\alpha \downarrow \beta)$ y a $f_4 \leftrightharpoons \left(\alpha \mid \beta\right)$. Y también a $f_2 \leftrightharpoons (\neg\alpha)$ y a $f_3 \leftrightharpoons (\neg\beta)$ pero éstas no son suficientes.

Proposición$_6$. Los únicos conectivos binarios que por si solos forman un *CMC* son el *NOR* y el *NAND*.