$B - \mathcal{F} -$ Inductivos

En lo que sigue, sea U un conjunto no–vacío.

Definición$_1$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. f es una *Operación de aridad n sobre U* syss $f : U^n \to U$.

Definición$_2$. Sean $C \subseteq U$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y f una operación de aridad n sobre U.
C es *Cerrado bajo f* syss

$$\forall u_1, u_2, \ldots, u_n \in C, f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in C$$

en breve, $f[C^n] \subseteq C$.

Obsérvese que tanto ∅ como U son cerrados bajo cualquier operación sobre U.

En lo que sigue, sean $\mathcal{F}$ una familia de operaciones sobre U y $B \subseteq U$.

Definición$_3$. C es un *Conjunto B–$\mathcal{F}$–Inductivo* syss

1) $B \subseteq C \subseteq U$ y

2) C es cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$.

Ejemplos:

1. U es un B–$\mathcal{F}$–Inductivo, para cualquier B y cualquier $\mathcal{F}$.

2. $C \subseteq U$. C es un ∅–$\mathcal{F}$–Inductivo syss C es cerrado bajo $\mathcal{F}$.

3. U es el único U–$\mathcal{F}$–Inductivo.

4. C es un B–∅–Inductivo syss $C \supseteq B$.

5. Consideremos a $U = \mathbb{R}$. .

a. Sea $\mathcal{F} = \left\{ \_ + 1 \right\}$. C es un $\{0\}$–$\mathcal{F}$–Inductivo syss $C \supseteq \omega$ y C es cerrado bajo $\mathcal{F}$.

b. Sea $\mathcal{G} = \left\{ \_ + 1 \,,\, \_ - 1 \right\}$. C es un $\{0\}$–$\mathcal{F}$–Inductivo syss $C \supseteq \mathbb{Z}$ y C es cerrado bajo $\mathcal{G}$.

Lema$_1$. Si $\mathcal{C}$ es una familia, no–vacía, de conjuntos B–$\mathcal{F}$–Inductivos, entonces $\cap\mathcal{C}$ es un conjunto B–$\mathcal{F}$–Inductivo.
Prueba:
1) $B \subseteq \cap\mathcal{C} \subseteq U$. Pues cada elemento de $\mathcal{C}$ contiene a B y está contenido en U.
2) $\cap\mathcal{C}$ es Cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$. Pues cada elemento de $\mathcal{C}$ es cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$. †

Definición$_4$ $(\downarrow)$. $B^* = \bigcap \left\{ C \ / \ C \text{ es un conjunto } B\text{–}\mathcal{F}\text{–inductivo} \right\}$

Observación. B^* está bien definido, pues es la intersección de una clase no-vacía (U es un conjunto B–$\mathcal{F}$–inductivo).

Debido al **Lema$_1$** y a las propiedades de la $\cap$ tenemos la siguiente,

Proposición$_2$. B^* es el $\subseteq$–menor conjunto B–$\mathcal{F}$– inductivo.

Hagamos explícitas las propiedades de B^* :

1). B^* es B–$\mathcal{F}$–inductivo, e.d.
- **a**). $B \subseteq B^* \subseteq U$,
- **b**). B^* es cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$. Y

2). Si C es un B–$\mathcal{F}$–Inductivo, entonces $B^* \subseteq C$.

Esta última propiedad es importante, pues nos dá un método para probar que todos los elementos de B^* tienen una determinada propiedad:

Principio de Inducción para B^* :

Sea $\wp$ una propiedad que compete al universo de discurso de los elementos de U.

Si

I). Todos los elementos de B tienen la propiedad $\wp$, e.d.

$$\forall b \in B, \wp(b).$$

Y

II). La propiedad $\wp$ se preserva bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$; e.d.
Si $f \in \mathcal{F}$ y es de aridad n y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$ son tales que

$$\wp(u_1), \wp(u_2), \ldots, \wp(u_n),$$

entonces $\wp\left(f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \right)$,

entonces $\forall b \in B^*, \ \wp(b)$.

Prueba: Sea $C = \left\{ u \in U \ / \ \wp(u) \right\}$. Así, **I**) y **II**) nos afirman que C no es otra cosa más que un B–$\mathcal{F}$–inductivo, por lo que $B^* \subseteq C$ y de aquí lo que queríamos probar. †

Otra manera equivalente, muy usada por cierto, es la siguiente:

Si $D \subseteq B^*$ con la propiedad de que:

I). $\forall b \in B, \ b \in D$. **Y**

II). Si cada vez que $f \in \mathcal{F}$, de aridad n, y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in D$, se tiene que $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in D$,

entonces $D = B$.

Como siempre, a **I**). se le llama *Base de la Inducción* y al antecedente de la implicación en **II**). se le llama *Hipótesis Inductiva.*

La manera en que construimos el $\subseteq$–menor B–$\mathcal{F}$–Inductivo, B^*, fué tomando la intersección de todos ellos, a esta forma de construir se le conoce como "de arriba para abajo" ($\downarrow$); por supuesto hay otra manera: "de abajo para arriba" ($\uparrow$). Ésta es mucho más natural, pues la idea es partir de B y después ir cerrando bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$. Debido a que con un primer intento podría no resutar que el conjunto obtenido fuera *cerrado* bajo las operaciones, necesitaríamos repetir este proceso "varias" veces; para ello se necesita del teorema de recursión para los números naturales.

Como antes, sean U un conjunto no–vacío, $\mathcal{F}$ una familia de operaciones sobre U y $B \subseteq U$. Por lo pronto daremos una,

Definición$_5$. Para cada $D \subseteq U$, sea D' el conjunto que se obtiene de aplicar todas las operaciones de $\mathcal{F}$ a C, en símbolos:

$$D' = \left\{ u \in U \ / \ \exists f \in \mathcal{F} \ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ \exists u_1, u_2, \ldots, u_n \in D, f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u \right\}$$

Ahora bien, el teorema de recursión para ω nos garantiza que la sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n\in\omega}$ está bien definida:

Definición$_6$.

i) $B_0 = B$

ii) $\forall n \in \omega, \quad B_{n+1} = B'_n \cup B_n$

Justificación:

En el Teorema de Recursión para números Naturales, tomar: $A = \wp(U)$, $a = B$ y $g : \wp(U) \to \wp(U)$ tal que $\forall D \subseteq U$, $g(D) = D' \cup D$. Y poner $f(n) = B_n$ para toda $n \in \omega$.

Con esto, la construcción de arriba–abajo ($\uparrow$):

Definición$_7$($\uparrow$). $B_* = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$.

Lema$_3$. B_* es un B–$\mathcal{F}$–Inductivo.

Prueba:

1). $B = B_0 \subseteq \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n = B_* \subseteq U$.

2). B_* es cerrado bajo las operaciones de $\mathcal{F}$: Sean $f \in \mathcal{F}$ una operación de aridad

$n \in \mathbb{Z}^+$ y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in B_*$. De la definición de B_* y del hecho de que la sucesión de los B_n forman una cadena bajo la contención ($\subseteq$), hay un $p \in \omega$ tal, que $u_1, u_2, \ldots, u_n \in B_p$. Ahora, por la definición de B'_p, tenemos que $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in B'_p \subseteq B_{p+1}$. Por tanto

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in B_{p+1} \subseteq \bigcup_{n \in \omega} B_n = B_*$$ †

Corolario$_4$. $B^* \subseteq B_*$.
Prueba: Inmediata del **Lema$_3$** y a la **Proposición$_2$** †

Proposición$_5$. $B_* \subseteq B^*$.
Prueba: Queremos ver que $\bigcup_{n \in \omega} B_n \subseteq B^*$ y por las propiedades de la unión, sería suficiente con probar que $\forall n \in \omega, (B_n \subseteq B^*)$. Esto lo haremos por inducción:

i). $B_0 \subseteq B^*$. Por ser B^* un B–$\mathcal{F}$–Inductivo: $B \subseteq B^*$ y $B = B_0$.

ii). Sea $n \in \omega$ arbitrario y supongamos inductivamente que $B_n \subseteq B^*$, probemos que $B_{n+1} \subseteq B^*$. Sea $u \in B_{n+1}$, como $B_{n+1} = B_n \cup B'_n$, solo nos falta comprobar el caso en que $u \in B'_n$. Hay pues, $m \in \mathbb{Z}^+$, $f \in \mathcal{F}$ de aridad m y $u_1, u_2, \ldots, u_m \in B_n$ tales que $f(u_1, u_2, \ldots, u_m) = u$. Por la H.I. tenemos que $u_1, u_2, \ldots, u_m \in B^*$ y como B^* es cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$, concluimos que $u = f(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in B^*$. †

Corolario$_6$. $B_* = B^*$.

Con esto tenemos todo el derecho de poner:

$$[B] = B_* = B^*$$

Y llamar a $[B]$ *el Conjunto Generado por $\mathcal{F}$ sobre B*. También, diremos que los elementos de B son los *(Elementos) Básicos* y a los elementos de $[B]$ que son el resultado de alguna operación de $\mathcal{F}$, les diremos que son *(Elementos) Generados.*

Recursión para $[B]$

En lo que sigue, sean U un conjunto no-vacío, $\mathcal{F}$ una familia de operaciones sobre U y $\emptyset \neq B \subseteq U$.

En ayuda de la notación, haremos una convención de notación: Si $f \in \mathcal{F}$ de aridad $n \in \mathbb{Z}^+$ y $C \subseteq U$, la restricción de f al conjunto C^n, comunmente denotado por $f \restriction C^n$, aquí lo denotaremos simplemente por f_C. Es decir:

$$f_C : C^n \to U$$
$$\forall u_1, \ldots, u_n \in C \;\; f_C(u_1, \ldots, u_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$$

Definición$_1$. *G está generado Líbremente por $\mathcal{F}$ sobre B, en U* syss

1. G está generado a partir de B por $\mathcal{F}$ sobre U. En símbolos:

$$G = [B] = B^* = B_*$$

2. Los elemementos básicos, no son generados por álguien de G. En símbolos:

$$\forall f \in \mathcal{F} \left[IMG(f_G) \cap B = \emptyset \right]$$

3. Todo elemento generado, es generado de manera única:

a). Las imágenes de las operaciones de $\mathcal{F}$, son ajenas entre sí, en G:

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \left[f_G \neq g_G \to IMG(f_G) \cap IMG(g_G) = \emptyset \right]$$

b). Las operaciones de $\mathcal{F}$, son inyectivas en G:

$$\forall f \in \mathcal{F} \; \forall \vec{u}, \vec{v} \in DOM(f_G) \left[\vec{u} \neq \vec{v} \to f_G\left(\vec{u}\right) \neq f_G\left(\vec{v}\right) \right]$$

Un conjunto líbremente generado está partido en dos conjunto ajenos: En los elementos básicos y en los elementos generados, y por enfatizar, generados de una sola manera.

Sea G el conjunto líbremente generado por F sobre B en U. Supongamos que hay un conjunto V tal, que para cada operación $f \in \mathcal{F}$, hay asociada otra operación sobre V, digamos $\widetilde{f}$, de la misma aridad. En símbolos, si $f : U^n \to U$, entonces hay una (única) $\widetilde{f} : V^n \to V$.

Así, para cada función $F : B \to V$, hay una única función F^* tal, que:

$$F^* : G \to V$$

I. $F^* \restriction B = F$. Equivalentemente, $F^* \supseteq F$ es decir:

para todo $b \in B,$ se tiene que $F^*(b) = F(b)$

II. F^* se comporta como un homomorfismo con las operaciones. Formalmente: Si $f \in \mathcal{F},$ de aridad $n,$ y $u_1,\ldots,u_n \in G,$ entonces

$$F^*(f(u_1,\ldots,u_n)) = \widetilde{f}(F^*(u_1),\ldots,F^*(u_n))$$

En aras de la claridad y para ayudarnos con la prueba, vamos a dar algunas definiciones y sus propiedades. Lo primero a considerar son funciones que *parcialmente* se comportan como la función F^*.

Definición$_2$. Diremos que i es *Adecuada* syss

(**0**) i es una función,

(**1**) $B \subseteq DOM(i) \subseteq G$ e $IMG(i) \subseteq V,$

(**2**) $i \restriction B = F.$ Es decir: $\forall b \in B,\ i(b) = F(b)$ y

(**3**) Si para alguna $f \in \mathcal{F},$ de aridad $n,$ y algunos $u_1,\ldots,u_n \in G,$ se tiene que $f(u_1,\ldots,u_n) \in DOM(i),$ entonces $u_1,\ldots,u_n \in DOM(i)$ y $i(f(u_1,\ldots,u_n)) = \widetilde{f}(i(u_1),\ldots,i(u_n)).$

Y sea $\mathcal{A} = \Big\{ i\ /\ i \text{ es una adecuada} \Big\}.$

Observemos en primer lugar que $\mathcal{A}$ es un conjunto (¿por qué?); en segundo lugar, al ser G líbremente generado (cumple con la clausula **2**. de la **Definición$_1$**) la clausula (**3**) se aplica solamente a elementos generados y no a básicos, no cayendo así en posibles contradicciones. Y una última observación es que $F \in \mathcal{A}$ -cumple con (**3**) por vacuidad-.

Lema$_1$. Dos funciones adecuadas son compatibles. Es decir:
Para $i,j \in \mathcal{A},$ se tiene que,

$$\forall x \in G\Big[x \in (DOM(i) \cap DOM(j)) \ \rightarrow\ i(x) = j(x) \Big]$$

Prueba: Por comodidad, pongamos $Z = (DOM(i) \cap DOM(j))$ y sea

$$C = \Big\{ x \in G\ /\ x \in Z \rightarrow i(x) = j(x) \Big\}$$

Queremos que $C = G,$ pero como $C \subseteq G,$ basta ver que C es B–$\mathcal{F}$–inductivo:

i). $B \subseteq C \subseteq U$:
Tenemos que $C \subseteq G \subseteq U.$ Ahora veamos que $B \subseteq C$: Sea $u \in B,$ por (**2**), tenemos que $i(u) = F(u) = j(u),$ por lo que $u \in C.$

ii). C es cerrado bajo las operaciones de $\mathcal{F}$:
Supongamos que $f \in \mathcal{F}$ de aridad $n,$ y que $u_1,u_2,\ldots,u_n \in C,$ demostremos que $f(u_1,u_2,\ldots,u_n) \in C.$ En primer lugar, puesto que $C \subseteq G$ y G es cerrado bajo las

operaciones de $\mathcal{F}$, tenemos que $f(u_1,u_2,\ldots,u_n) \in G$.

Para la segunda parte, supongamos pues que, $f(u_1,u_2,\ldots,u_n) \in Z$. Desarrollemos nuestras hipótesis: Por un lado, como $i,j \in \mathcal{A}$, por (**3**) inferimos que:

(**a**) $u_1,\ldots,u_n \in Z$, y

(**b**) $i(f(u_1,\ldots,u_n)) = \widetilde{f}(i(u_1),\ldots,i(u_n))$ y $j(f(u_1,\ldots,u_n)) = \widetilde{f}(j(u_1),\ldots,j(u_n))$.

Por otro lado, para cada $p \in \{1,\ldots,n\}$, como $u_p \in C$, tenemos que:

$$u_p \in Z \to i(u_p) = j(u_p) \tag{$*$}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} i(f(u_1,u_2,\ldots,u_n)) &= \widetilde{f}(i(u_1),\ldots,i(u_n)) && \text{por (b)} \\ &= \widetilde{f}(j(u_1),\ldots,j(u_n)) && \text{de (a), } (*) \text{ y ser } \tilde{f} \text{ función} \\ &= j(f(u_1,u_2,\ldots,u_n)) && \text{por (b)} \end{aligned}$$

†

Lema$_2$. La unión, no-vacía, de funciones adecuadas es una función adecuada. En símbolos:

$$\text{Si } \emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \text{ entonces } \cup\mathcal{B} \in \mathcal{A}$$

Prueba: Por el **Lema$_1$** tenemos que $\cup\mathcal{B}$ es una función (¿Por qué?) Pongamos $h = \cup\mathcal{B}$. La función h, tiene las siguientes propiedades:

·). $DOM(h) = \bigcup_{i\in\mathcal{B}} DOM(i)$,

··). $IMG(h) = \bigcup_{i\in\mathcal{B}} IMG(i)$, y

···). Si $u \in DOM(h)$, $h(u) = v$ syss hay una $i \in \mathcal{B}$ tal, que $u \in DOM(i)$ e $i(u) = v$.

Veamos que h es adecuada:

1). Ya que cada $i \in \mathcal{B}$ es adecuada, cumplen con (**1**) y tomando en cuenta ·) y ··), tenemos:

$$B \subseteq DOM(h) \subseteq G \text{ y } IMG(h) \subseteq V.$$

2). $h \restriction B = F$: Sea $b \in B$. Como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, hay una $i \in \mathcal{B}$ tal, que $B \subseteq DOM(i)$; así, por ···) y por (**2**) de la definición de adecuada, $h(b) = i(b) = F(b)$.

3). Sean $f \in \mathcal{F}$, de aridad n, y $u_1,\ldots,u_n \in G$, tales que $f(u_1,\ldots,u_n) \in DOM(h)$. Por ·), hay una $i \in \mathcal{B}$ tal, que $f(u_1,\ldots,u_n) \in DOM(i)$. Ya que i es adecuada, cumple con (**3**) y por tanto $u_1,\ldots,u_n \in DOM(i) \subseteq DOM(h)$. Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned} h(f(u_1,\ldots,u_n)) &= i(f(u_1,\ldots,u_n)) && \text{Por iii)} \\ &= \widetilde{f}(i(u_1),\ldots,i(u_n)) && i \in \mathcal{A} \\ &= \widetilde{f}(h(u_1),\ldots,h(u_n)) && \text{Por iii) y ser } \widetilde{f} \text{ función} \end{aligned}$$

†

Lema$_3$. Todo elemento de G pertenece al dominio de una adecuada. En símbolos:

$$\forall u \in G\, \exists i \in \mathcal{A}\, [u \in DOM(i)]$$

Prueba: Sea,

$$D = \Big\{u \in G \ / \ \exists i \in \mathcal{A}[u \in DOM(i)]\Big\}$$

Puesto que $D \subseteq G$, si D fuera un B–$\mathcal{F}$–inductivo, tendríamos que $D = G$ y habríamos terminado. Veamos que esto es cierto:

i). $B \subseteq D$: Sabemos que $F \in \mathcal{A}$ cuyo $DOM(F) = B$.

ii). Sean $f \in \mathcal{F}$ de aridad n, y $u_1,\ldots,u_n \in D$, demostremos que $f(u_1,\ldots,u_n) \in D$, es decir que hay $i \in \mathcal{A}$ tal que $f(u_1,\ldots,u_n) \in DOM(i)$. Pasemos a "construir" tal función.

Para empezar, tenemos que para cada $p \in \{1,\ldots,n\}$, como $u_p \in D$, hay (al menos) una $i \in \mathcal{A}$ tal que $u_p \in DOM(i)$; consideremos la unión de todas ellas: Sea

$$j = \bigcup\Big\{i \ / \ \exists p \in \{1,\ldots,n\}(u_p \in DOM(i))\Big\}$$

Por el **Lema₂**, j es una función adecuada. Ahora bien, esta j tiene la propiedad de que para cada $p \in \{1,\ldots,n\}$, $u_p \in DOM(j) \subseteq U$ y $j(u_p) \in V$; por lo que $\langle u_1,\ldots,u_n\rangle \in U^n$ y $\langle j(u_1),\ldots,j(u_n)\rangle \in V^n y$ por tanto, podemos aplicarles f y $\widetilde{f}$ respectivamente. Con esto, tenemos que si

$$k = \Big\{\Big\langle f(u_1,\ldots,u_n) \ , \ \widetilde{f}(j(u_1),\ldots,j(u_n))\Big\rangle\Big\}$$

k es una función. Ahora, sea $i_0 = j \cup k$. Afirmamos que $i_0 \in \mathcal{A}$:

(**0**). i_0 es función: Hay que ver que j y k son compatibles. En caso de que los dominios sean ajenos, no hay nada que probar. Supongamos pues, que $f(u_1,\ldots,u_n) \in DOM(j)$. Como $f(u_1,\ldots,u_n)$ es un elemento -de G- generado, tenemos que $f(u_1,\ldots,u_n) \in DOM(j) \setminus B$ y de aquí que el valor que toma $f(u_1,\ldots,u_n)$ por j, queda dado -en virtud del inciso (**3**) de la **Definición₂**- como: $j(f(u_1,\ldots,u_n)) = \widetilde{f}(j(u_1),\ldots,j(u_n))$; por tanto $j(f(u_1,\ldots,u_n)) = k(f(u_1,\ldots,u_n))$.

(**1**). Tenemos:

$B \subseteq DOM(j) \subseteq \underline{DOM(i_0)} = DOM(j) \cup DOM(k) = DOM(j) \cup \{f(u_1,\ldots,u_n)\} \subseteq G.$

$\underline{IMG(i_0)} = IMG(j) \cup IMG(k) = IMG(j) \cup \Big\{ \ \widetilde{f}(j(u_1),\ldots,j(u_n)) \ \Big\} \subseteq V.$

(**2**). Sea $b \in B$. Como $B \subseteq DOM(j) \setminus DOM(k)$, tenemos que $i_0(b) = j(b)$. Ahora, puesto que $j \in \mathcal{A}$, -por (**2**) de la **Definición₂**- $j(b) = F(b)$. Concluimos que $i_0(b) = F(b)$.

(**3**). Sean $g \in \mathcal{F}$, de aridad m, y $v_1,\ldots,v_m \in G$ tales, que $g(v_1,\ldots,v_m) \in DOM(i_0)$. tenemos que probar que $v_1,\ldots,v_m \in DOM(i_0)$ y que $i_0(g(v_1,\ldots,v_m)) = \widetilde{g}(i_0(v_1),\ldots,i_0(v_m))$.

Como $g(v_1,\ldots,v_m) \in DOM(j \cup k)$, tenemos dos casos:

a). $g(v_1,\ldots,v_m) \in DOM(j)$. Como $j \in \mathcal{A}$, obtenemos que $v_1,\ldots,v_m \in DOM(j) \subseteq DOM(i_0)$ y que $j(g(v_1,\ldots,v_m)) = \widetilde{g}(j(v_1),\ldots,j(v_m))$. Así,

$$\begin{aligned} i_0(g(v_1,\ldots,v_m)) &= j(g(v_1,\ldots,v_m)) && \text{def. de } i_0 \\ &= \widetilde{g}(j(v_1),\ldots,j(v_m)) \\ &= \widetilde{g}(i_0(v_1),\ldots,i_0(v_m)) && \text{def. de } i_0 \text{ y } \widetilde{g} \text{ es función} \end{aligned}$$

b). $g(v_1,\ldots,v_m) = f(u_1,\ldots,u_n)$. Por la cláusula **3**.**a**. de que G es líbremente generado, se tiene que $g = f$; en particular, $DOM(g) = DOM(f)$, por lo que $m = n$. Consecuentemente, $f(v_1,\ldots,v_n) = f(u_1,\ldots,u_n)$. Ahora, por la cláusula **3**.**b**, tenemos que $v_1 = u_1,\ldots,v_n = u_n$. Teniendo:

$$\begin{aligned} i_0(g(v_1,\ldots,v_m)) &= i_0(f(u_1,\ldots,u_n)) \\ &= k(f(u_1,\ldots,u_n)) \\ &= \widetilde{f}(j(u_1),\ldots,j(u_n)) \\ &= \widetilde{g}(j(v_1),\ldots,j(v_m)) \\ &= \widetilde{g}(i_0(v_1),\ldots,i_0(v_m)) \end{aligned}$$

†

Finalmente, pasemos a enunciar y a probar el resultado:

Teorema de Recursión para Conjuntos Generados Libremente.

Sea G el conjunto líbremente generado por F sobre B en U. Supongamos que hay un conjunto V tal, que para cada $f \in \mathcal{F}$, con $f : U^n \to U$, hay una (única) $\widetilde{f} : V^n \to V$. Así, para cada función $F : B \to V$, hay una única función F^* tal, que:

$$F^* : G \to V$$

I. $F^* \upharpoonright B = F$. Equivalentemente, $F^* \supseteq F$ es decir:

para todo $b \in B$, se tiene que $F^*(b) = F(b)$

II. F^* se comporta como un homomorfismo con las operaciones. Formalmente: Si $f \in \mathcal{F}$, de aridad n, y $u_1,\ldots,u_n \in G$, entonces

$$F^*(f(u_1,\ldots,u_n)) = \widetilde{f}(F^*(u_1),\ldots,F^*(u_n))$$

Prueba:

$\exists$] Sea $F^* = \bigcup \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ es un conjunto de adecuadas, por el **Lema**$_2$, tenemos que F^* es adecuada. Así, F^* es una función que, gracias al **Lema**$_3$, tiene $DOM(F^*) = G$ y cumple **I** y **II**.

!] Sean F' y F'' funciones que cumplen con **I** y **II** respectivamente. Pero en tal caso ambas, F' y F'', son adecuadas y por tanto, por el **Lema₁**, $F' = F''$. †

Una observación importante es, que la prueba que acabamos de dar de la parte de la unicidad, está fuertemente basada en el hecho de que el conjunto G sea libremente generado (se usa el **Lema₁**, que a vez usa la definición de adecuada y ésta *necesita* que sea *líbremente generado)* dando pie a pensar -erróneamente- que es necesaria esta condición; sin embargo esto no es cierto. Pasemos a dar otra prueba, la cual no lo exige:

Supongamos que tenemos funciones F' y F'' que cumplen con **I** y **II** respectivamente. Puesto que $DOM(F') = G = DOM(F'')$, basta probar que

$$\forall u \in G\Big[F'(u) \;=\; F''(u)\Big]$$

Y esto lo haremos por inducción para conjuntos generados:

i) $\forall u \in B\Big[F'(u) \;=\; F(u) = F''(u)\Big]$

ii). Supongamos, inductivamente, que $u_1, \ldots, u_n \in G$ son tales que $F'(u_p) = F''(u_p)$ para toda $p \in \{1, \ldots, n\}$ y sea $f \in \mathcal{F}$ de aridad n. Así,

$$\begin{array}{rcll} F'(f(u_1,u_2,\ldots,u_n)) & = & \widetilde{f}(F'(u_1),\ldots,F'(u_n)) & \text{por } \mathbf{II} \\ & = & \widetilde{f}(F''(u_1),\ldots,F''(u_n)) & \text{de H.I. y ser } \widetilde{f} \text{ función} \\ & = & F''(f(u_1,u_2,\ldots,u_n)) & \text{por } \mathbf{II} \end{array}$$ †

Así las cosas, lo que concluimos es dado un conjunto generado, a lo más tiene una función de recursión y la existencia de dicha función está garantizada si dicho conjunto está líbremente generado.