Lógica Matemática III
Tarea-Examen I.

Prof. Rafael Rojas Barbachano
Aydte. Fernando Javier Nuñez Rosales

6 de marzo de 2014

Demuestre los siguientes resultados:

1. Para cada una de las siguientes funciones pruebe que son recursivas.
   - La función factorial.
   - La función exponencial.
   - $res(x, y)$ el residuo de dividir x entre y.
   - $coc(x, y)$ el cociente de dividir x entre y.
   - $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que a cada natural le asocia el numero de divisores.
   - $\mathfrak{n} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que a cada natural le asocia el numero de primos menores o iguales que el.
   - $min\{x_1, \ldots, x_n\}$ el mínimo de n números.
   - $max\{x_1, \ldots, x_n\}$ el máximo de n números.
   - Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva

     $$\sum_{u<i<v} f(x_1, \ldots, x_n, i)$$

   - Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva

     $$\prod_{u<i<v} f(x_1, \ldots, x_n, i)$$

2. Si $f(x, y, z)$ es una función recursiva y $k \in \mathbb{N}$ entonces $g(x, y) = f(x, y, k)$ es una función recursiva.

3. Demuestre que Si $G' : \mathbb{N}^l \longrightarrow \mathbb{N}$ y $H' : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ son funciones recursivas entonces $F' : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ obtenida por el Método de Recursión' produce una función recursiva.

4. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función recursiva. Demuestre que $g(x, n) = f(f(f \ldots (f(x) \ldots)$ (aplicar f $n+1$-veces a x), es recursiva.

5. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función recursiva primitiva. Si $A = \{x \in \mathbb{N} : f(x) \neq f(y) \; \textit{para todo} \; y < x\}$, entonces A es recursivo.

6. Sea A_L el conjunto con las siguientes fórmulas:

   - $S_3 \rightleftharpoons \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(sy = x))$
   - $L_1 \rightleftharpoons \forall x \forall y(x < sy \leftrightarrow x \leqslant y)$
   - $L_2 \rightleftharpoons \forall x \neg(x < 0)$
   - $L_3 \rightleftharpoons \forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$
   - $L_4 \rightleftharpoons \forall x \forall y(x < y \rightarrow \neg(y < x))$
   - $L_5 \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z((x < y \& y < z) \rightarrow x < z)$

   Pruebe que A_L admite eliminación de cuantificadores.

7. Sea $\eta_s = \langle \mathbb{N}, s, 0 \rangle$. Demuestre que $A \subseteq \mathbb{N}$ es definible en η_s syss es finito o su complemento lo es.