Lógica Matemática III
Tarea-Examen II

Prof. Rafael Rojas Barbachano
Ayte. Fernando Javier Nuñez Rosales

21 de abril de 2014

1. Pruebe que:

   - Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

   $$AP \vdash (v_0 \leqslant \bar{k}) \rightarrow (v_0 \approx \bar{0} \vee \ldots \vee v_0 \approx \bar{k})$$

   - Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para toda $\alpha(v_0) \in \mathscr{L}^1_{AP}$ se tiene que

   $$AP \vdash \big(\alpha(\bar{0}) \& \ldots \& \alpha(\bar{k})\big) \rightarrow \forall v_1 (v_1 \leqslant \bar{k} \rightarrow \alpha(v_1))$$

   - Para todo $k \in \mathbb{N}$,

   $$AP \vdash \forall v_0 (v_0 \leqslant \bar{k} \vee \bar{k} \leqslant v_0)$$

   Indicación: Use inducción en el metalenguaje sobre k.

2. Pruebe que $TERM$ y $FORM$ son relaciones recursivas *Indicación: Use recursión por curso de valores.*

3. Definamos un nuevo operador M. Si tenemos una relación $R(\bar{x}, y) \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ y $Z = \{z \in \mathbb{N} : R(\bar{x}, z)\} \neq \emptyset$ entonces $My(R(\bar{x}, y))$ nos arroja el **máximo** $y \in Z$. Claramente dicho máximo no debe por que existir, ademas si R es recursiva tampoco asegura la recursividad de $My(R(\bar{x}y))$, pero si lo acotamos ya lo sera!

Pruebe que si $R(\bar{x}, z)$ es una relación recursiva entonces

$$Mz < y(R(\bar{x}, z))$$

es recursiva.

4. Pruebe que $\star$ es asociativa pero no es conmutativa.

5. Pruebe que si $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ son funciones recursivas y $R_1, \ldots, R_m \subseteq \mathbb{N}^k$ son relaciones recursivas, ajenas dos a dos y que

$$\bigcup_{i=1}^{m} R_i = \mathbb{N}$$

entonces $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por casos como sigue

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) & Si\ R_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) & Si\ R_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ \vdots & \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_k) & Si\ R_m(x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{cases}$$

es recursiva.

6. Pruebe que si AP es consistente y correcta y $D \subseteq \mathbb{N}^m$ es expresable en AP por $\varphi(v_1, \ldots, v_m)$, entonces D es definible en $\eta = \langle \mathbb{N}, s, +, *, 0 \rangle$

7. Pruebe que si $E \subseteq \mathbb{N}$ es expresable en AP por $\alpha(v_1, \ldots, v_m) \in \mathscr{L}_{AP}^m$ y AP es consistente, entonces

   - Si $AP \vdash \alpha(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_m})$ entonces $(k_1, \ldots, k_m) \in E$ y
   - Si $AP \vdash \neg\alpha(\bar{k_1}, \ldots, \bar{k_m})$ entonces $(k_1, \ldots, k_m) \notin E$

8. Sea $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}$ una función aritmética. Si f es fuertemente representable en AP entonces f es recursiva general. *Indicación: Para empezar, al no ser necesariamente primitiva tendra que emplear el operador μ por otro lado tome en cuenta el numero de Gödel de la prueba etc...*

9. **RECUERDE LO QUE VIMOS EN CLASE DE DEFINIBILIDAD!!!!** Pruebe el teorema de Tarski, es decir, pruebe que

$$\{m \in \mathbb{N} \mid \text{hay } \psi \in \mathscr{L}^0_{AP}\ g_2(\psi) = m \text{ y } \eta \models \psi\}$$

no es definible en la aritmética. En otras palabras seria probar que no hay $\mathcal{V}(v_0) \in \mathscr{L}^1_{AP}$ tal que para todo $\varphi \in \mathscr{L}^0_{AP}$ se tiene que

$$\eta \models \mathcal{V}(g_2(\varphi)) \Leftrightarrow \eta \models \varphi$$

Indicación: Suponga que si y use el truco de Gödel.