Tarea- Examen III
La última y nos vamos...

Prof. Rafael Rojas Barbachano
Ayte. Fernando Javier Nuñez Rosales

18 de mayo de 2014

1. Demuestre el Teorema de Gödel-Rosser Generalizado. (Viene en las notas de clase).

2. Dados $A, B \subseteq \mathbb{N}$, decimos que son recursivamente separables syss hay $C \subseteq \mathbb{N}$ recursivo, tal que $A \subseteq C$ y $B \subseteq \mathbb{N} \setminus C$. Definimos
$$T = \{g_2(\varphi) : AP \vdash \varphi \text{ } y \text{ } \varphi \in \mathscr{L}^0_{AP}\}$$
$$R = \{g_2(\psi) : AP \vdash \neg\psi \text{ } y \text{ } \psi \in \mathscr{L}^0_{AP}\}$$
   a) Pruebe que T y R no son recursivamente separables.
   b) Concluya que el conjunto de los teoremas de AP no es es recursivo.

3. Sea $\alpha(v_1, v_2)$ la fórmula que representa la relación $PRU(x, y)$. Definamos $\varphi(v_2) \leftrightharpoons \exists v_1 \alpha(v_1, v_2)$, es decir, $\varphi(v_2)$ representa ser teorema. Sea $\sigma \in \mathscr{L}^0_{AP}$ la fórmula que arroja el lema diagonal para $\neg\varphi(v_2)$, es decir
$$AP \vdash \neg\varphi(\ulcorner\sigma\urcorner) \longleftrightarrow \sigma$$
.
   a) Prueba que si AP es consistente entonces $\nvdash \sigma$.
   b) Prueba que si AP es ω-consistente entonces $\nvdash \neg\sigma$.

4. En clase probamos que si Σ es un conjunto recursivo de enunciados y es sintácticamente completo entonces el conjunto de teoremas de Σ es recursivo. ¿Con este teorema y el primer ejercicio de esta tarea como probaría el primer teorema de incompletud de Gödel?

5. Sea $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ una enumeración de los AP-enunciados. Definamos por recursión para ω la siguiente función:
$$\Sigma_0 = AP$$
$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} & \textit{Si } \Sigma_n \cup \{\alpha_n\} \textit{ es consistente} \\ \\ \Sigma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \textit{En otro caso} \end{cases}$$
   Y tomamos
$$\Delta = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$$
   Sabemos que Δ es consistente y completo. Contradice esto el teorema de Gödel? De ser así diga por que, si no es así seguro la razón sera acredora a una demostración. **Realicela por favor.**