Sistema Axiomático para la Aritmética

Nuestro lenguaje formal de primer órden $\mathcal{L}_{AP}$, cuyo tipo de semejanza es:

$$\rho = \{f_+ , f_\cdot , f_s\} \cup \{c\}$$

Queda descrito como sigue,

$$\mathcal{L}_{AP} = \rho \cup \{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{ \approx \} \cup \{\neg, \ \rightarrow \} \cup \{ \forall \} \cup \{), (, ' \}$$

Reglas de Inferencia:

Modus Ponens: $\dfrac{\alpha \qquad (\alpha \rightarrow \beta)}{\beta}$ **y** **Generalización**: $\dfrac{\alpha}{\forall x \alpha}$

Axiomas Lógicos:

- **AL₁** : $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- **AL₂** : $\big(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\big)$
- **AL₃** : $\big(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta\big) \rightarrow \big((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\big)$
- **AL₄** : $\forall x \alpha \rightarrow \alpha\big(x / \tau\big)$:
  donde τ es un término libre para la variable x, en la fórmula α.
- **AL₅** : $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$:
  donde la variable x no ocurra libre en α.
- **AL₆** : $\forall v_0(v_0 \approx v_0)$.
- **AL₇** : $\forall x \forall y\Big(x \approx y \rightarrow \Big(\alpha\big(x, x\big) \rightarrow \alpha\big(x, y\big)\Big)\Big)$:
  Donde x y y son variables, $\alpha\big(x, x\big)$ es cualquier fórmula y $\alpha\big(x, y\big)$ se obtiene a partir de $\alpha\big(x, x\big)$, al sustituir algunas, no necesariamente todas, las ocurrencias libres de x por y; con la condición adicional de que y sea libre para x en $\alpha\big(x, x\big)$.

Axiomas Propios:

- **AP₁** : $\forall v_0\Big(\neg\Big(f_s(v_0) \approx c\Big)\Big)$
- **AP₂** : $\forall v_0 \forall v_1\Big(\Big(f_s(v_0) \approx f_s(v_1)\Big) \to \Big(v_0 \approx v_1\Big) \Big)$
- **AP₃** : $\forall v_0\Big(f_+\Big(v_0, c\Big) \approx v_0\Big)$
- **AP₄** : $\forall v_0 \forall v_1\Big(f_+\Big(v_0, f_s(v_1)\Big) \approx f_s\Big(f_+\Big(v_0, v_1\Big)\Big)\Big)$
- **AP₅** : $\forall v_0\Big(f_.\Big(v_0, c\Big) \approx c\Big)$
- **AP₆** : $\forall v_0 \forall v_1\Big(f_.\Big(v_0, f_s(v_1)\Big) \approx f_+\Big(f_.\Big(v_0, v_1\Big), v_1\Big)\Big)$
- **PI** : $\alpha(c_0) \to \Big(\forall x\Big(\alpha(x) \to \alpha(f_s(x))\Big) \to \forall x \alpha(x)\Big)$