Primer Teorema de Incompletud de Gödel (1931).

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.
(Sobre proposiciones formalmente indecidibles en Principia Mathematica y Sistemas afines)

Consideremos $\rho = \left\{ f_s^1 \,, f_+^2 \,, f_\cdot^2 \,, c_0 \right\}$ y a su lenguaje $\mathcal{L}_\rho$.

Supongase que AP es un conjunto de ρ–enunciados *Decidible* y en el cual todas las relaciones *Decidibles* son Representables. Así, hay un ρ–enunciado σ_g tal, que

I. Si AP es consistente, entonces $AP \nvdash \sigma_g$.

II: Si AP es ω–Consistente, entonces $AP \nvdash \neg\sigma_g$.

Por lo que, si AP es ω–Consistente, entonces AP tiene un indecidible, a saber σ_g, y por tanto Incompleta –Sintácticamente.

Donde,

AP es ω–Inconsistente syss hay una fórmula $\varphi(x)$ tal, que

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi\left(x / \overline{n}\right)$ y $AP \vdash \exists x \neg\varphi(x)$

Teorema de Gödel-Rosser (Generalizado)

En 1936, Berkley Rosser modificó la construcción de Gödel, obteniendo el resultado sin usar ω–consistencia, e.d. usando solamente consistencia. Aquí presentamos una versión más amplia, en el sentido de extensiones –numerables– de la arimética.

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \left\{ f_s^1 \,, f_+^2 \,, f_\cdot^2 \,, c_0 \right\} \qquad \text{y} \qquad \left| \, \rho \, \right| \leq \aleph_0$$

Y por tanto, $\left| \, \mathcal{L}_\rho \, \right| = \aleph_0$.

El Teorema toma la siguiente forma.

Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal que:

1. T es Recursivamente Axiomatizable (sus axiomas forman un conjunto decidible).

2. Toda Relación (Función) Recusiva es Expresable (Representable) en T.

3. **i**). Para toda ρ–fórmula con exactamente una variable libre, digamos $\varphi(x)$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \varphi\left(x / \overline{0}\right) \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi\left(x / \overline{k}\right) \rightarrow \forall x\left(x \leq \overline{k} \rightarrow \varphi(x)\right)$$

ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \forall x\left(x \leq \overline{k} \ \vee \ \overline{k} \leq x\right)$$

Así, si T es Consistente, entonces T tiene un Indecidible y por tanto es Incompleta.

Segundo Teorema de Incompletud de Gödel (1931).

Si con_T es un ρ–enunciado el cual garantiza la consistencia de T, entonces

$$CON(T) \Rightarrow T \nvdash con_T$$