ARITMÉTICA RECURSIVA

En lo que sigue adoptaremos las siguientes **convenciones**:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Usaremos las letras minúsculas: x,y,z,w,m,n,p,q,i,j,k y l con -eventualmente- índices y supraíndices, como **metavariables** para **números naturales**.

Por una *Función* u *Operación* f, *de aridad* n, entenderemos que $n \geq 1$ y $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

Por una *Relación* R, *de aridad* n, entenderemos que $n \geq 1$ y $R \subseteq \mathbb{N}^n$.

Quedando por entendido que, al hablar de funciones y relaciones serán de, o entre, números naturales y tendrán una aridad **mayor o igual a uno***.*

No como una regla, pero en la medida de lo posible, se utilizarán letras minúsculas como metavariables para funciones; en cambio, usaremos letras mayúsculas para relaciones.

Muy particularmente, trabajaremos con las siguientes funciones:

La *Función sucesor*, se denotará como : $^+$. Así, $^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, p.e. $12^+ = 13$.

Las *Funciones Constantes* : Para un k arbitrario,

$$\mathcal{C}_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$\forall x_1,\ldots,x_n\ \mathcal{C}_k^n(x_1,\ldots,x_n) = k$$

Las *Funciones Proyección* : Para $1 \leq k \leq n$,

$$\pi_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$\forall x_1,\ldots,x_n\ \pi_k^n(x_1,\ldots,x_n) = x_k$$

Usaremos dos métodos de definición de funciones, por *Sustitución* y por *Recursión*.

I) **Método de Recursión**:

a) Sean $m \in \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

i) $F(0) = m$

ii) $\forall y F(y^+) = G\big(F(y),\, y\big)$

se dirá que *se obtuvo por Recursión a partir de* m *y de* G.

b) Sean $H : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ dada por

i) $\forall x_1,\ldots,x_n F\Big(x_1,\ldots,x_n,\ 0\Big) = H(x_1,\ldots,x_n)$

ii) $\forall x_1,\ldots,x_n \forall y F\Big(x_1,\ldots,x_n,\ y^+\Big) = G\Big(x_1,\ldots,x_n,\ F(x_1,\ldots,x_n,y)\ ,\ y\Big)$

se dice que *se obtuvo por Recursión apartir de H y de G*.

II) **Método de Sustitución**:

Sea $G : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y sean $H_1,\ldots,H_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dada por

$$\forall x_1,\ldots,x_n F(x_1,\ldots,x_n) = G\Big(H_1(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots\ ,H_m(x_1,\ldots,x_n)\Big)$$

se dirá que *se obtuvo por Sustitución a partir de G y de $H_1,\ldots,H_m$*.

Definición. Son *Funciones Iniciales* o, símplemente, *Iniciales,* las siguientes,

I) La función Sucesor: $^+$

II) Las funciones Constantes: $\mathcal{C}_k^n$

III) Las funciones Proyección: π_k^n

Definición. Una función f es una *Función Recusiva (Primitiva)* syss hay una lista finita de funciones, digamos $f_1,\ldots,f_n$, donde:

i) $f_n = f$ y

ii) Para toda $i \in \{1,\ldots,\ n\}$ se tiene que, o bien

a) f_i es Inicial. O,

b) f_i se obtuvo por Recursión o por Sustitución a partir de funciones anteriores de la lista.

Así, las funciones recursivas son aquellas que se obtienen al aplicar, un número finito de veces, recursión y sustitución a funciones iniciales.

Como ejemplos, veamos que la suma y el producto son primitivas. Antes, recordemos cómo se definen:

	$+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$		$\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
i)	$\forall m,\ m + 0 = m$	i)	$\forall m,\ m \cdot 0 = 0$
ii)	$\forall m,n,\ m + (n^+) = (m+n)^+$	ii)	$\forall m,n,\ m \cdot (n^+) = (m \cdot n) + m$

Pasemos a dar las listas, empezando con la suma:

$f_1^1 : \ \pi_1^1$	Inicial	$f_1^1(x) = x$
$f_2^1 : \ \_^+$	Inicial	$f_2^1(x) = x^+$
$f_3^3 : \ \pi_2^3$	Inicial	$f_3^3(x,y,z) = y$
$f_4^3 : \ f_2^1(f_3^3(x,y,z))$	Sust. a partir de f_2 y f_3	$f_4^3(x,y,z) = y^+$
$f_5^2 : \ f_5^2\big(x,\ 0\big) = f_1^1(x)$	Rcn. a partir de f_1 y de f_4	$f_5^2(x,0) = x$
$\quad f_5^2\big(x,\ y^+\big) = f_4^3\big(x,\ f_5^2(x,y),\ y\big)$		$f_5^2(x,y^+) = (f_5^2(x,y))^+$

Con lo que queda probado su recursividad primitiva.

Pasemos con el producto. Como para definirlo necesitamos de la suma, símplemente continuamos la lista anterior.

$f_6 : \ \mathcal{C}_0^1$	Inicial	$f_6(x) = 0$
$f_7 : \ \pi_1^3$	Inicial	$f_7(x,y,z) = x$
$f_8 : \ f_5\big(f_3(x,y,z),\ f_7(x,y,z)\big)$	Sust. a partir de f_5 y f_3, f_7	$f_8(x,y,z) = f_5(y,x)$
$f_9 : \ f_9\big(x,\ 0\big) = f_6(x)$	Rcn. a partir de f_6 y de f_8	$f_9(x,0) = 0$
$\quad f_9\big(x,\ y^+\big) = f_8\big(x,\ f_9(x,y),\ y\big)$		$f_9(x,y^+) = f_5(f_9(x,y),x)$

Dejamos al lector probar que la exponenciación y el factorial son funciones recusivas. Éstas se definen de la siguiente manera:

	$\smile\ \smile \ : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$		$! \ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
i)	$\forall m,\ m^0 = 1$	i)	$0! = 1$
ii)	$\forall m,n,\ m^{(n^+)} = m^n \cdot m$	ii)	$\forall n,\ (n^+)! = n! \cdot (n^+)$