

Definiciones y propiedades de funciones recursivas.

Definición₁. Sumas y productos acotados:

Sea $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, definimos:

$$1. \sum_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ f(x_1, \dots, x_n, 0) + \dots + f(x_1, \dots, x_n, z-1) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

$$2. \sum_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y) = f(x_1, \dots, x_n, 0) + \dots + f(x_1, \dots, x_n, z)$$

$$3. \prod_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ f(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot \dots \cdot f(x_1, \dots, x_n, z-1) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

$$4. \prod_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y) = f(x_1, \dots, x_n, 0) \cdot \dots \cdot f(x_1, \dots, x_n, z)$$

Las cuales son operaciones de aridad $n + 1$ (v.g. están en función de x_1, \dots, x_n y z).

Proposición₅. Las sumas y productos acotados de Funciones Recursivas, son Funciones Recursivas.

Prueba: Veamos **1**.

La función $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por:

$$g(x_1, \dots, x_n, 0) = 0$$

$$g(x_1, \dots, x_n, z^+) = g(x_1, \dots, x_n, z) + f(x_1, \dots, x_n, z)$$

se obtiene por recursión a partir de C_0^n y de G , donde

$$G : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$G(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}) = \pi_1^1(u_{n+1}) + f(u_1, \dots, u_n, u_{n+2})$$

Ahora bien, G se obtiene por sustitución' a partir de $+$ y de π_1^1, f .

Recapitulando, si f es recursiva, entonces G lo sería y por tanto también g .

Finalmente,

$$g(x_1, \dots, x_n, z) = \sum_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y)$$

Pasemos a **2**. La idea es tomar $\sum_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{y < z+1} f(x_1, \dots, x_n, y)$ y para ello

nos ayudamos de la función g dada anteriormente.

Sea $h : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por:

$$h(x_1, \dots, x_n, z) = g(x_1, \dots, x_n, z + 1)$$

ésta se obtiene por sustitución' a partir de las funciones g y de $\pi_1^1, +$. Pero así,

$$h(x_1, \dots, x_n, z) = \sum_{y \leq z} f(x_1, \dots, x_n, y)$$

y será recursiva siempre y cuando f lo sea.

Se dejan al lector (**TAREA**) los productos acotados.

Ejemplo: Sea,

$$\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\forall x, \tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \\ \text{número de divisores de } x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Así, τ es una función recursiva. Pues:

$$\tau(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg}(res(x, y))$$

donde $\overline{sg}(res(x, y))$ es una función que se obtiene por sustitución de las funciones recursivas \overline{sg} y res . por lo que es recursiva. Finalmente τ es una función recursiva.

Definición₂. Sumas y productos doblemente acotados:

1. $\sum_{u < y < v} f(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, u + 1) + \dots + f(x_1, \dots, x_n, v - 1) & \text{si } u < v \\ 0 & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
2. $\prod_{u < y < v} f(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, u + 1) \cdot \dots \cdot f(x_1, \dots, x_n, v - 1) & \text{si } u < v \\ 0 & \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$
3. $\sum_{u \leq y < v} f(x_1, \dots, x_n, y), \sum_{u < y \leq v} f(x_1, \dots, x_n, y), \sum_{u \leq y \leq v} f(x_1, \dots, x_n, y)$
4. $\prod_{u \leq y < v} f(x_1, \dots, x_n, y), \prod_{u < y \leq v} f(x_1, \dots, x_n, y), \prod_{u \leq y \leq v} f(x_1, \dots, x_n, y)$

Proposición₆. Las sumas y productos doblemente acotados de funciones recursivas, son recursivas.

Prueba: TAREA.

†