

## Relaciones Recursivas

Aquí trataremos de recuperar la idea de que una relación es *efectivamente decidible*, con la noción de *recursividad*. Para ello nos ayudaremos de las noción de función recursiva. Antes un poco de notación.

Por una *Relación*  $R$ , entenderemos que  $R \subseteq \mathbb{N}^n$  para algún  $n > 0$ . Usaremos las letras mayúsculas:  $R, S, T, \dots$  como metavariables para las relaciones. Escribiremos  $R(a_1, \dots, a_n)$  en lugar de  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$  y eventualmente, cuando esté claro cual es la aridad,  $R(\bar{a})$ .

**Definición<sub>1</sub>.** Sea  $R \subseteq \mathbb{N}^n$ . Una función  $f_R$  es una *Función Representante* de la relación  $R$  syss

$$f_R : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\forall x_1 \dots x_n, f_R(x_1 \dots x_n) = 0 \text{ syss } R(x_1 \dots x_n)$$

Es obvio que una relación tiene varias funciones representantes; a la que sólo toma valores de 0 o de 1 es la función característica y la denotaremos por  $C_R$ . Así,

$$C_R(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{x} \in R \\ 0 & \\ 1 & \text{si } \bar{x} \notin R \end{cases}$$

Por lo general la función característica se define de otra manera (0 si NO y 1 si SI) sin embargo, conviene para nuestros propósitos tomarla de ésta manera.

**Definición<sub>2</sub>.** Una relación  $R$  es una *Relación Recursiva (Primitiva)* syss  $R$  tiene una función representante recursiva (primitiva).

**Ejemplos:** Son relaciones recursivas las siguientes:

1.  $a \leq b : f_{\leq}(x, y) = x \dot{-} y \quad (C_{\leq}(x, y) = sg(x \dot{-} y))$ .
2.  $a = b : f_{=} (x, y) = |x - y| \quad (C_{=} = sg(|x - y|))$ .
3.  $a < b : C_{<}(x, y) = \overline{sg}(y \dot{-} x)$ .
4.  $a \mid b : C_{\mid}(x, y) = sg(res(y, x))$ .
5.  $PRM = \{x / x \text{ es un número primo}\}$  (**TAREA**)

**Proposición<sub>1</sub>.** Una relación es recursiva syss su función característica lo es.

**Prueba:** Si  $R$  es recursiva, hay una función representante, digamos  $f_R$ , la cual es

recursiva. Pero entonces la función,

$$C_R(\bar{x}) = sg(f_R(\bar{x}))$$

se obtiene por sustitución de las recursivas  $sg$  y  $f_R$ , por lo que es recursiva. El “regreso” es trivial. †

**Definición<sub>3</sub>.** Sean  $R, S \subseteq \mathbb{N}^n$ . Definimos las siguientes relaciones de la misma aridad.

- a).  $\neg R = \mathbb{N}^n \setminus R = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{N}^n / (x_1, \dots, x_n) \notin R \}$ .
- b).  $R \vee S = R \cup S = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{N}^n / R(x_1, \dots, x_n) \text{ o } S(x_1, \dots, x_n) \}$ .
- c).  $R \wedge S = R \cap S = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{N}^n / R(x_1, \dots, x_n) \text{ y } S(x_1, \dots, x_n) \}$ .
- d).  $R \Rightarrow S = \dots$
- e).  $R \Leftrightarrow S = \dots$

En forma natural se generalizan la  $\vee$  y  $\wedge$  para relaciones que tienen distintas aridades, teniendo el cuidado de cuidar las variables distintas; por ejemplo: si  $x, y, z$  y  $u$  son todas distintas, la relación  $R(x, y, z) \vee S(x, u)$  definirá una nueva relación de aridad 4, digamos  $T(x, y, z, u)$ .

**Proposición<sub>2</sub>.** Sean  $R, S \subseteq \mathbb{N}^n$ . Si  $R$  y  $S$  son relaciones recursivas entonces también lo son  $\neg R, R \vee S$  y  $R \wedge S$ .

**Prueba:**

Sean  $C_R$  y  $C_S$  las funciones características de  $R$  y  $S$  respectivamente. Así,

- a).  $C_{\neg R}(x_1, \dots, x_n) = 1 - C_R(x_1, \dots, x_n) = \overline{sg}(C_R(x_1, \dots, x_n))$
- b).  $C_{R \vee S}(x_1, \dots, x_n) = C_R(x_1, \dots, x_n) + C_S(x_1, \dots, x_n) - C_R(x_1, \dots, x_n) \cdot C_S(x_1, \dots, x_n)$   
 $= \min \{ C_R(x_1, \dots, x_n), C_S(x_1, \dots, x_n) \}$
- c).  $C_{R \wedge S}(x_1, \dots, x_n) = sg(C_R(x_1, \dots, x_n) + C_S(x_1, \dots, x_n) - C_R(x_1, \dots, x_n) \cdot C_S(x_1, \dots, x_n))$   
 $= \max \{ C_R(x_1, \dots, x_n), C_S(x_1, \dots, x_n) \}$

†

Dada una relación  $R \subseteq \mathbb{N}$ , si por  $\exists y R(y)$  entendieramos la (nueva) relación: Hay un natural  $y$  tal que  $R(y)$ , ésta resulta que en general **no** es decidible (¿por qué?) y por tanto (???) no debería ser recursiva. Podemos modificar el cuantificador a uno acotado y esta resulta una mejor alternativa.

**Definición<sub>4</sub>.** Sea  $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ . Por  $\exists y \leq v R(\bar{x}, y)$  entenderemos la nueva relación:

Hay un  $y \in \mathbb{N}$ , tal que  $y \leq v$  y  $R(\bar{x}, y)$   
 la cual es de aridad  $n + 1$  (está en función de  $\bar{x}$  y  $v$ ).

**Proposición<sub>3</sub>.** Sea  $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ . Si  $R$  es una relación recursiva, entonces la relación  $\exists y \leq v R(\bar{x}, y)$  también lo es.

**Prueba:** Sea  $Q(\bar{x}, v) \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$  dada por:  $Q(\bar{x}, v) \text{ syss } \exists y \leq v R(\bar{x}, y)$ . La función característica de  $C_Q$ , queda dada por,

$$C_Q(\bar{x}, v) = \prod_{y \leq v} C_R(\bar{x}, y)$$

†

En forma muy similar tenemos el cuantificador universal acotado:

**Definición<sub>5</sub>.** Sea  $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ . Por  $\forall y \leq v R(\bar{x}, y)$  entenderemos la relación:  
 Para todo  $y \in \mathbb{N}$ , si  $y \leq v$ , entonces  $R(\bar{x}, y)$ .

**Proposición<sub>4</sub>.** Sea  $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ . Si  $R$  es una relación recursiva, entonces  $\forall y \leq v R(\bar{x}, y)$  también.

**Prueba:** Sea  $S(\bar{x}, v) \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$  dada por:  $S(\bar{x}, v) \text{ syss } \forall y \leq v R(\bar{x}, y)$ . La característica de  $S$  queda dada por:

$$C_S(\bar{x}, v) = sg \left( \sum_{y \leq v} C_R(\bar{x}, y) \right)$$

Otra prueba sería:

$$S(\bar{x}, v) \text{ syss } \neg (\exists y \leq v \neg R(\bar{x}, y))$$

†

**TAREA:**  $\exists y < v R(\bar{x}, y)$  y  $\forall y < v R(\bar{x}, y)$