Aritmetización del Metalenguaje

A continuación damos en un solo resultado, una lista de las relaciones y operaciones recursivas que nos ayudarán a aritmetizar el Metalenguaje de la Aritmética Formalizada. Las primeras cinco ya dimos su prueba y por tanto solamente las enunciamos.

Proposición$_\infty$. Las siguientes relaciones y operaciones son recursivas primitivas:

1. $PRM \subseteq \mathbb{N}$ es el conjunto de números primos. Así, $PRM(x)$ syss x es un número primo.

2. $P\_ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donde P_n es el n–ésimo primo en orden ascendente.

3. Para cada $j \in \mathbb{N}$, la función $[\ \ ]_j : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ está definida como sigue:

$$[x]_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ a_j & \text{si} \quad x = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \ \dots \ \cdot P_j^{a_j} \cdot P_{j+1}^{a_{j+1}} \cdot \ \dots \end{cases}$$

OjO: $[x]_j \neq 0$ syss $\neg\left(P_j^{y+1} \mid x\right) \vee x \leq 1$

4. Las siguientes funciones indistintamente las llamaremos *Longitud de un número.*

a). La función $ld : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nos da para un $a > 1$, el número de primos –distintos– que lo dividen, o equivalentemente, el número de exponentes no–cero en la factorización en potencias de números primos.

$$ld(x) = \sum_{j \leq x} sg\left([x]_j\right)$$

Obsérvese que $ld(0) = 0 = ld(1)$.

b). La función $lg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nos da el índice del (primer) primo que no lo divide y que ningun otro primo mayor tampoco lo divida.

$$lg(x) = \mu y_{y<n}\left[\forall z_{z<n}\left(z \geq y \Rightarrow (\neg(P_z \mid x))\right)\right]$$

Osérvese que $lg(0) = 0 = lg(1)$.

5. La función binaria $\star$, llamada *Concatenación,* queda definida como sigue:

$$x \star y = x \bullet \prod_{j<lg(x)} (P_{lg(x)+j})^{[y]_j}$$

Observando que, si

$$x = P_0^{a_0} \bullet P_1^{a_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_n^{a_n} \quad \text{y} \quad y = P_0^{b_0} \bullet P_1^{b_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_m^{b_m}$$

con $a_i \neq 0$ y $b_j \neq 0$, entonces

$$x \star y = P_0^{a_0} \bullet P_1^{a_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_n^{a_n} \bullet P_{n+1}^{b_0} \bullet P_{n+2}^{b_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_{n+m+1}^{b_m}$$

6. **a**). La función $pp : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, llamada *Poner Paréntesis*, trabaja de la siguiente manera:
Si E es una AP–expresión y su número de secuencia es x, e.d. $g_2(E) = x$, entonces $pp(x)$ es el número de secuencia de la expresión "(E)" y así, $pp(x) = g_2\big((E) \big)$. Es recursiva pues,

$$pp(x) = 2^{g_1(()} \star x \star 2^{g_1())}$$

b) La función $ppc : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, llamada *poner paréntesis con coma*, trabaja de la siguiente manera: Si E y F son AP–expresiones tales que $g_2(E) = x$ y $g_2(F) = y$, entonces $ppc(x,y) = g_2\Big(\ (E,F) \ \Big)$. Esta es recursiva pues,

$$ppc(x,y) = pp(x \star 2^{g_1(,)} \star y)$$

7. $VAR \subseteq \mathbb{N}$. $VAR(x)$ syss x es el número de secuencia de una variable de $\mathcal{L}_{AP}$.

$$VAR(x) \text{ syss } \exists y_{y<x}(x = 2^{g_1(v_y)})$$

8. $TERM \subseteq \mathbb{N}$. $TERM(x)$ syss x es el número de secuencia de un AP–término.

$$\begin{aligned} TERM(x) \quad \text{syss} \quad & VAR(x) \lor (x = 2^{g_1(C_0)}) \lor \\ & \lor \ \ \exists y_{y<x}\Big[TERM(y) \ \land \ (x = 2^{g_1(f_S)} \star pp(y)) \Big] \\ & \lor \ \ \exists y_{y<x} \exists z_{z<x}\Big[TERM(y) \land TERM(z) \ \land \ (x = 2^{g_1(f_+)} \star ppc(y,z)) \Big] \\ & \lor \ \ \exists y_{y<x} \exists z_{z<x}\Big[TERM(y) \land TERM(z) \ \land \ (x = 2^{g_1(f_\cdot)} \star ppc(y,z)) \Big] \end{aligned}$$

TAREA: Probar que $TERM$ es una R.R. (Sug. usar recursión por curso de valores)

9. $ATOM \subseteq \mathbb{N}$. $ATOM(x)$ syss x es el número de secuencia de una fórmula atómica de $\mathcal{L}_{AP}$.

$$ATOM(x) \text{ syss } \exists y_{y<x} \exists z_{z<x}(TERM(y) \land TERM(z) \land (x = pp(y \star 2^{g_1(\approx)} \star z)))$$

10. La función $neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, trabaja de la siguiente manera: Si $E \in EXP_{AP}$ y

$g_2(E) = x$, entonces $neg(x) = g_2\big((\neg E) \big)$.

$$neg(x) = pp(2^{g_1(\neg)} \star x)$$

11. La función $imp : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, trabaja de la siguiente manera: Si $E,F \in EXP_{AP}$ con $g_2(E) = n$, y $g_2(F) = m$, entonces $imp(n,m) = g_2\big((E \to F) \big)$.

$$imp(x,y) = pp(x \star 2^{g_1(\to)} \star y)$$

12. La función $cu : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, trabaja de la siguiente manera: Si $E \in EXP_{AP}$ con $g_2(E) = m$, entonces $cu(n,m) = g_2\big((\forall v_n\, E) \big)$.

$$cu(x,y) = pp\Big(\big(2^{g_1(\forall)} \cdot 3^{g_1(v_x)} \big) \star y\Big)$$

13. $FORM \subseteq \mathbb{N}$. $FORM(x)$ syss x es el número de secuencia de una Fórmula de $\mathcal{L}_{AP}$. Es una Relación Recursiva pues,

$$\begin{aligned} FORM(x) \quad \text{syss} \quad & ATOM(x) \lor \\ & \lor \Big[\exists y_{y<x} \Big(FORM(y) \land x = neg(y) \Big) \Big] \\ & \lor \Big[\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} \Big(FORM(y) \land FORM(z) \land x = imp(y,z) \Big) \Big] \\ & \lor \Big[\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} \Big(FORM(y) \land x = cu(z,y) \Big) \Big] \end{aligned}$$

TAREA: Probar que $FORM$ es una R.R. (Sug. usar recursión por curso de valores)

14. $MP \subseteq \mathbb{N}^3$. $MP(x,y,z)$ syss z es el número de secuencia de una fórmula que se obtiene por la regla de Modus Ponens de las fórmulas cuyos números de secuencia son x e y.

$$MP(x,y,z) \quad \text{syss} \quad FORM(x) \land FORM(y) \land FORM(z) \land \big(y = imp(x, z) \big)$$

15. $GEN \subseteq \mathbb{N}^2$. $GEN(x,y)$ syss y es el número de secuencia de una fórmula que se obtuvo por la regla de Generalización aplicada a la fórmula con número de secuencia x.

$$GEN(x,y) \quad \text{syss} \quad FORM(x) \land FORM(y) \land \exists z_{z<y} \big(y = cu(z, x) \big)$$

16. Axiomas Lógicos (primera parte).

a) $AL1(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo $\mathbf{AL_1}$.

$$AL1(x) \text{ syss } \exists y_{y<x} \exists z_{z<x} \Big[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge \Big(x = imp\big(y, imp(z,y) \big) \Big) \Big]$$

b) $AL2(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL₂**.

$$AL2(x) \text{ syss } \exists y_{y<x} \exists z_{z<x} \exists w_{w<x} \Big[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge FORM(w) \wedge$$
$$x = imp\Big(imp\Big(y \ , \ imp(z,w) \Big) \ , \ imp\Big(imp(y,z) \ , \ imp(y,w) \Big) \Big) \Big]$$

c) $AL3(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL₃**.

$$AL3(x) \text{ syss } \exists y_{y<x} \exists z_{z<x} \Big[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge$$
$$x = imp\Big(imp\Big(neg(y) \ , \ neg(z) \Big) \ , \ imp\Big(imp\big(neg(y), z \big) \ , \ y \Big) \Big) \Big]$$

f) $AL6(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL₆**.

$$AL6(x) \text{ syss } x = cu\big(0, pp(2^{g_1(v_0)} \cdot 3^{g_1(\approx)} \cdot 5^{g_1(v_0)}) \big)$$

Quedan pendientes los demás axiomas lógicos.

17. Axiomas Propios. Axiomas de Peano, AP (primera parte).

a) $AP1(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP₁**.

$$AP1(x) \text{ syss } x = cu\big(0, neg\big(pp\big(2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_0)}) \star 2^{g_1(\approx)} \star 2^{g_1(c_0)} \big) \big) \big)$$

b) $AP2(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP₂**.

$AP2(x)$ syss $x = cu\Big(0, cu\Big(1, imp\Big(n \ , \ m\Big)\Big)\Big)$. Donde,

$$n = pp\big(2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_0)}) \star 2^{g_1(\approx)} \star 2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_1)}) \big)$$

y

$$m = pp\big(2^{g_1(v_0)} \cdot 3^{g_1(\approx)} \cdot 5^{g_1(v_1)} \big)$$

c) $AP3(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP₃**.

$AP3(x)$ syss $x = \ \ldots$

d) $AP4(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP₄**.

$AP4(x)$ syss $x = \ \ldots$

e) $AP5(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP₅**.

$AP5(x)$ syss $x = \ \ldots$

f) $AP6(x)$ syss x es el número de secuencia del axioma **AP₆**

$AP6(x)$ syss $x = \ \ldots$

Queda pendiente el esquema axiomático de Inducción.