18. **a**) $VO \subseteq \mathbb{N}^3$. $VO(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–fórmula con número de secuencia m, en el lugar p.

$$VO(n,m,p) \text{ syss } FORM(m) \wedge \big(\, [m]_p = g_1(v_n) \,\big)$$

b) $VOF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOF(n,m)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$VOF(n,m) \text{ syss } \exists y_{y<lg(m)} \big(\, VO\big(n,\ m,\ y\big)\,\big)$$

19. **0**) $VOA1 \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOA1(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–fórmula con número de secuencia m en el lugar p y es la variable del cuantificador universal $\forall v_n$.

$$VOA1(n,m,p) \text{ syss } VO(n,m,p) \wedge \Big([m]_{p \dot{-} 1} = g_1(\forall)\Big)$$

00) $VOA2 \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOA2(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en la AP–fórmula con número de secuencia m en el lugar p y está en el alcance del cuantificador universal $\forall v_n$.

$$\begin{aligned} & VOA2(n,m,p) \\ \text{syss} \quad & VO(n,m,p) \wedge \exists x_{x<m} \exists y_{y<m} \exists z_{z<m} \Big[\big(\, m = x \star cu(n,y) \star z \,\big) \wedge \\ & \qquad \wedge \Big(VO\big(n,\ y,\ p \dot{-} (lg(x)+3)\big)\Big) \Big] \end{aligned}$$

Obsérvese que queda contemplado el caso en que la fórmula, con número de secuencia m, sea la cuantificación universal $\forall v_n$ de otra fórmula (es el caso $x = 1 = z$ y recordando que $1 \star a = a = a \star 1$ y que $lg(1) = 0$).

a) $VOA \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOA(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **A**cotada en la AP–fórmula con número de secuencia m en el lugar p.

$$VOA(n,m,p) \text{ syss } VOA1(n,m,p) \vee VOA2(n,m,p)$$

b) $VOAF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOAF(n,m)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **A**cotada en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$VOAF(n,m) \text{ syss } \exists y_{y<lg(m)} \big(\ VOA(n,m,y)\ \big)$$

20. **a**) $VOL \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOL(n,m,p)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **L**ibre en la AP–fórmula con número de secuencia m en el lugar p.

$$VOL(n,m,p) \text{ syss } VO(n,m,p) \wedge \neg VOA(n,m,p)$$

b) $VOLF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOLF(n,m)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre **L**ibre en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$VOLF(n,m) \text{ syss } \exists y_{y<lg(m)}\Big[\ VOL(n,m,y)\ \Big]$$

21. $VOT \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOT(n,q)$ syss la **V**ariable v_n **O**curre en el AP–**T**érmino con número de secuencia q.

$$VOT(n,q) \quad \text{syss} \quad TERM(q) \ \wedge\ \exists y_{y<lg(q)}\Big(\ [q]_y = g_1(v_n)\ \Big)$$

22. $SFRM \subseteq \mathbb{N}^2$. $SFRM(n,m)$ syss n es el número de secuencia de una **S**ub**F**ó**RM**ula de la AP–fórmula con número de secuencia m.

$$\begin{aligned} SFRM(n,m) \quad \text{syss} \quad & FORM(n) \wedge FORM(m) \wedge \\ & \wedge\ \Big[\ \exists x_{x<m}\exists y_{y<m}\ \big(\ m = x \star n \star y\ \big)\ \Big] \end{aligned}$$

Para el caso en que la subfórmula sea ella misma, $n = m$, la observación hecha en **19.00**) es aplicable.

23. $TLVF \subseteq \mathbb{N}^3$. $TLVF(q,n,m)$ syss el **T**érmino, con número de secuencia q, es **L**ibre para la **V**ariable v_n en la AP–**F**órmula con número de secuencia m.

$$\begin{aligned} & TLVF(q,n,m) \\ \text{syss} \quad & TERM(q) \wedge FORM(m) \wedge \\ & \wedge \neg\, \exists x_{x\le m}\exists y_{y\le q}\exists z_{z<m}\Big[SFRM\big(x,\ m\big)\ \wedge\ x = cu\big(y,\ z\big)\ \wedge\ VOT\big(y,\ q\big)\ \wedge \\ & \qquad \wedge\ \forall w_{w\le m}\Big(SFRM\big(w,\ m\big)\ \wedge\ SFRM\big(z,\ w\big) \Rightarrow VOLF\big(n,\ w\big)\Big)\Big] \end{aligned}$$

24. Quisieramos tener una función $lol : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, la cual trabajara de la siguiente manera: Si $lol(n,m,k) = p$, entonces la **O**currencia **L**ibre número k de la variable v_n, en la AP–fórmula con número de secuencia m, ocupa el **L**ugar p.

Ejemplo: Sea $m = g_2(\varphi)$, donde φ es la AP–fórmula,

$$\Big(\forall v_{28}(v_{28} \approx v_{35})\ \to\ (f_s(v_{35}) \approx v_{28})\Big)$$

Tenemos la siguiente situación:

k	$\leftrightharpoons$							0						1			0		
φ	$\leftrightharpoons$	(	$\forall$	v_{28}	(	v_{28}	$\approx$	v_{35}	)	$\to$	(	f_s	(	v_{35}	)	$\approx$	v_{28}	)	)
p	$\leftrightharpoons$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Así tendríamos que,

$$lol(35,m,0) = 6 \qquad lol(35,m,1) = 12 \qquad lol(28,m,0) = 15$$

En los casos en que la variable no ocurriera o que su ocurrencia no fuera la k–ésima, el valor que tomara lol no importa, con tal de que no nos meta en problemas. Una buena solución y que nos servirá más adelante, es que tome como valor a la $lg(m)$. En nuestro ejemplo, $lol(41,m,k) = lg(m) = 18,$ para toda $k,$ y para toda $k \geq 1,$ tendríamos que $lol(28,m,k) = lg(m) = 18.$ Lo mismo podríamos pedir si la variable ni siquiera ocurre libre o si m no es el número de secuencia de una fórmula.

Podemos definir lol recursivamente, a partir de recursivas, como sigue:

$$\begin{aligned} lol\big(n,\ m,\ 0\big) &= \mu y_{y<lg(m)}\Big[\ VOL\big(n,\ m,\ y\big)\ \Big] \\ lol\big(n,\ m,\ k^{+}\big) &= \mu y_{y<lg(m)}\Big[VOL(n,m,y)\ \wedge\ y > lol(n,m,k) \Big] \end{aligned}$$

25. Ahora queremos una función $nol : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},$ la cual trabaje de la siguiente manera: Si $nol(n,m) = l,$ entonces la variable v_n **O**curre **L**ibre en la AP–fórmula con número de secuencia $m,$ un **N**úmero l de veces.

En el ejemplo anterior tendríamos: $nol(28,m) = 1,$ $nol(35,m) = 2$ y $nol(41,m) = 0.$

La función nol es recursiva pues,

$$nol(n,m) = \mu y_{y<lg(m)}\Big[lol(n,m,y) \ = \ lg(m) \Big]$$

Otra respuesta es considerando la función característica de $VOL.$ Tenemos,

$$nol(n,m) = \sum_{y<lg(m)} \overline{sg}\ \big(\ \mathcal{C}_{VOL}(n,m,y)\big)$$

26. Queremos una función $remp : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},$ la cual trabaje de la siguiente manera: Si n y m son números de secuencia de dos expresiones, digamos E y F respectivamente y si $remp(n,m,p) = k,$ entonces k es el número de secuencia de la expresión que se obtiene de $E,$ al **RE**e**MP**lazar el símbolo que ocurre en el lugar $p,$ por la expresión $F.$

Un ejemplo: Si $E \leftrightharpoons f_{+}\big(v_0,\ c_0\big) \approx c_0$ y $F \leftrightharpoons f_s(c_0)$ donde $g_2(E) = n$ y $g_2(F) = m,$ entonces

$remp(n,m,3) = g_2\Big(\ f_{+}\big(f_s(c_0),\ c_0\big) \approx c_0\ \Big)$ y $remp(n,m,2) = g_2\Big(\ f_{+}f_s(c_0)v_0,\ c_0) \approx c_0\ \Big)$

La función $remp$ es recursiva pues,

$$remp(n,m,p) \ = \ \prod_{i<p} P_i^{[n]_i} \star m \star \prod_{p<i<lg(n)} P_i^{[n]_i}$$

¿ Qué ocurre si $p \geq lg(n)$? R: $remp(n,m,p) = (n \bullet 1) \star m \star 1 = n \star m.$

27. **a**) Queremos una función $sus : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ tal que si $sus(n,m,k,l) = p$ entonces p es el número de secuencia de la fórmula que resulta de sustituir las primeras l

ocurrencias libres de la variable v_m por la expresión con número de secuencia k en la fórmula con número de secuencia n.
La función sus queda definida recursivamente, a partir de recursivas, como sigue:

$$\begin{aligned} sus(n,m,k,0) &= n \\ sus(n,m,k,l^+) &= remp\Big(sus(n,m,k,l),\ k\ ,\ lol(m,n,l) + l \cdot lg(k)\Big) \end{aligned}$$

b) Queremos una función $sst : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}.$ tal que si $sst(n,m,k) = z,$ entonces z es el número de secuencia de la fórmula que resulta de **S**u**S**tituir **T**odas las ocurrencias libres de la variable v_m por la expresión con número de secuencia k en la AP–fórmula con número de secuencia n.

$$sst(n,m,k) = sus(n,m,k,nol(m,n))$$