Recursión por Curso de Valores

Muchas veces es necesario definir funciones por recursión las cuales el valor de $f(x_1, \dots, x_n, y^+)$ depende no solamente del valor tomado en y, es decir de $f(x_1, \dots, x_n, y)$, sino también de algunos o todos los valores de $f(x_1, \dots, x_n, u)$ con $u \le y$. Este tipo de recursión se llama *Recursión por Curso de Valores.*

Como ejemplo, tenemos la Sucesión de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, la podemos definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ F(0) &= 1 \\ F(1) &= 1 \\ F(y+2) &= F(y) + F(y+1) \end{aligned}$$

Este método de definición, Recursión por Curso de Valores, es aceptado –y si se desea, se puede justificar por métodos conjuntistas. No es nuestra intensión dar una prueba de ello, lo que nos interesa es ver que este método es Recusivo (Primitivo). Para ello,

Definición. Para cada $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, hay una función asociada, $f_\# : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, la cual está definida de la siguiente manera,

$$f_\#(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{z<y} P_z^{f(x_1, \dots, x_n, z)}$$

Observaciones:

1. **i**). $f_\#(x_1, \dots, x_n, 0) = 1$. Y

ii). $f_\#(x_1, \dots, x_n, y+1) = P_0^{f(x_1, \dots, x_n, 0)} \bullet \dots \bullet P_y^{f(x_1, \dots, x_n, y)}$

2. Si $u < y$, entonces

$$f(x_1, \dots, x_n, u) = \left[\prod_{z<y} P_z^{f(x_1, \dots, x_n, z)} \right]_u = \left[f_\#(x_1, \dots, x_n, y) \right]_u$$

3. Si tuvieramos a la función $f_\#$, podríamos obtener a la original pues, para cualquier y se tiene,

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = \left[f_\#(x_1, \dots, x_n, y+1) \right]_y$$

Veamos cómo trabaja la función # en nuestro ejemplo de la sucesión de Fibonacci.

1. $F_{\#}(0) = 1$
2. $F_{\#}(1) = P_0^{F(0)} = 2^1$
3. $F_{\#}(2) = P_0^{F(0)} \bullet P_1^{F(1)} = 2^1 \bullet 3^1$
4. $F_{\#}(3) = P_0^{F(0)} \bullet P_1^{F(1)} \bullet P_2^{F(2)} = 2^1 \bullet 3^1 \bullet 5^2$
5. $F_{\#}(4) = P_0^{F(0)} \bullet P_1^{F(1)} \bullet P_2^{F(2)} \bullet P_3^{F(3)} = 2^1 \bullet 3^1 \bullet 5^2 \bullet 7^3$

$\vdots$

Tedríamos, por ejemplo que $F(3) = \big[\ F_{\#}(4)\ \big]_3 = 2.$

La función $f_{\#}$ es una especie de “archivo” que va guardando la información que la función original va tomando.

Proposición$_1$. Sea $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}.$ Así,

La función f es una **FR** syss la función $f_{\#}$ es una **FR**.

Prueba: La “ida” es inmediata de la definición de $f_{\#}$; es el producto acotado de una **FR**. El “regreso” se debe a que f se obtiene, ver el punto 3 de **Observaciones**, por Sustitución’ a partir de las recursivas $[\_]_{\_}$ y de $f_{\#},\ \_+1.$ †

Proposición$_2$. *(Recursión por Curso de Valores)*

Sean $H : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ tales, que

$$f\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y\big) = H\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y,\ f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y\big)\big)$$

Si H es una **FR**, entonces f también es una **FR**.

Prueba: Gracias a Sustitución’, basta ver que $f_{\#}$ es una **FR**.

La función $f_{\#}$ se puede obtener por recusión pues,

i). $f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ 0\big) \ = \ 1$

ii). $f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y^+\big) \ = \ f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y\big) \bullet P_y^{f(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y)}$ Def. $f_{\#}$

$\qquad = \ f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y\big) \bullet P_y^{H(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y,\ f_{\#}(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y))}$ Hip

Ahora, si definimos la función $G : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ como,

$$G\big(z_1,\ \ldots\ ,z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+2}\big) = z_{n+2} \bullet exp\big(P_{z_{n+1}},\ H\big(z_1,\ \ldots\ ,z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+2}\big)\big)$$

resulta que G es una **FR**, pues se obtiene por Sustitución’ a partir de **FR**. Finalmente, como $f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y^+\big) = G\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y,\ f_{\#}\big(x_1,\ \ldots\ ,x_n,\ y\big)\big)$, tenemos que $f_{\#}$ se obtiene por Recusión a partir de las recursivas C_1^n y G. †

Obsérvese que

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = H(x_1, \dots, x_n, y, f_\#(x_1, \dots, x_n, y)) = \left[f_\#(x_1, \dots, x_n, y+1)\right]_y$$

Volvamos con el ejemplo de la Sucesión de Fibonacci. La función F es una **FR**, pues la podemos obtener como sigue:

$$\begin{aligned} F(y) &= \overline{sg}(y) + \overline{sg}\left(\left|y - 1\right|\right) + \\ &\quad + sg(y \dot{-} 1) \cdot \left([F_\#(y)]_{y \dot{-} 1} + [F_\#(y)]_{y \dot{-} 2}\right) \end{aligned}$$

La función

$$H(y, z) = \overline{sg}(y) + \overline{sg}\left(\left|y - 1\right|\right) + sg(y \dot{-} 1) \cdot \left([z]_{y \dot{-} 1} + [z]_{y \dot{-} 2}\right)$$

es una **FR** y $F(y) = H(y, F_\#(y))$.

Veamos como trabaja,

1. $F_\#(0) = 1$
2. $F_\#(1) = F_\#(0) \cdot P_0^{H(0,F_\#(0))} = 1 \cdot 2^1 = 2^1$
3. $F_\#(2) = F_\#(1) \cdot P_1^{H(1,F_\#(1))} = 2^1 \cdot P_1^1 = 2^1 \cdot 3^1$
4. $F_\#(3) = F_\#(2) \cdot P_2^{H(2,F_\#(2))} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot P_2^{H(2,F_\#(2))}$ Y como,

$$\begin{aligned} H(2,F_\#(2)) &= 0 + 0 + 1 \cdot \left([F_\#(2)]_{2 \dot{-} 1} + [F_\#(2)]_{2 \dot{-} 2}\right) \\ &= [F_\#(2)]_1 + [F_\#(2)]_0 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, $F_\#(3) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot P_2^{1+1} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

5. $F_\#(4) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^{1+2} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

Ahora calculemos, por ejemplo $F(3)$.

a) Usando la **Observación₃** : $F(3) = \left[\, F_\#(4) \,\right]_3 = \left[\, 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \,\right]_3 = 3$

b) Usando la función H :

$$\begin{aligned} F(3) &= H(3,F_\#(3)) = 0 + 0 + 1 \cdot \left([F_\#(3)]_{3 \dot{-} 1} + [F_\#(3)]_{3 \dot{-} 2}\right) \\ &= [F_\#(3)]_2 + [F_\#(3)]_1 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

La recursión por curso de valores también la tenemos para relaciones.

Corolario₃. *(Recursión por Curso de Valores para Relaciones)*
Sean $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ y $S \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ tales que

$$R(x_1, \dots, x_n, y) \text{ syss } S(x_1, \dots, x_n, y, (C_R)_\#(x_1, \dots, x_n, y))$$

donde la C_R es la función característica de la relación R. Así, si S es una **RR**, entonces R también será una **RR**.
Prueba: Sea C_s la característica de S y supongamos que S es una **RR**. Tenemos,

$$C_R(x_1, \ldots, x_n, y) = C_S(x_1, \ldots, x_n, y, (C_R)_\#(x_1, \ldots, x_n, y))$$

Ya que la función C_S es una **FR**, la proposición anterior nos garantiza que C_R también es una **FR** y por tanto R es una **RR**. †

Para ver un ejemplo, recordemos que bajo la suposición de que $u < y$,

$$\left[\left(\; C_R \;\right)_\#(x_1, \ldots, x_n, y)\right]_u = C_R(x_1, \ldots, x_n, u)$$

por lo que

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_n, u) \quad &\text{syss} \quad C_R(x_1, \ldots, x_n, u) = 0 \\ &\text{syss} \quad \left[\left(\; C_R \;\right)_\#(x_1, \ldots, x_n, y)\right]_u = 0 \end{aligned}$$

Así, a la hora de probar que $TERM$ es una **RR**, podemos hacerlo por curso de valores, de la siguiente manera: En vez de escribir,

$$\begin{aligned} TERM(x) \quad \text{syss} \quad & VAR(x) \vee (x = 2^{g_1(C)}) \vee \\ & \vee \;\; \exists y_{y<x}\left[TERM(y) \;\wedge\; (x = 2^{g_1(f_S)} \star pp(y))\right] \\ & \vee \;\; \exists y_{y<x}\exists z_{z<x}\left[TERM(y) \wedge TERM(z) \;\wedge\; (x = 2^{g_1(f_+)} \star ppc(y,z))\right] \\ & \vee \;\; \exists y_{y<x}\exists z_{z<x}\left[TERM(y) \wedge TERM(z) \;\wedge\; (x = 2^{g_1(f_\cdot)} \star ppc(y,z))\right] \end{aligned}$$

escribimos así,

$$\begin{aligned} TERM(x) \quad \text{syss} \quad & VAR(x) \vee (x = 2^{g_1(C_0)}) \vee \\ & \vee \;\; \exists y_{y<x}\left[\left[\left(\; C_{TERM} \;\right)_\#(x)\right]_y = 0 \;\wedge\; (x = 2^{g_1(f_S)} \star pp(y))\right] \\ & \vee \;\; \exists y_{y<x}\exists z_{z<x}\left[\left[\left(\; C_{TERM} \;\right)_\#(x)\right]_y = 0 \;\wedge\; \left[\left(\; C_{TERM} \;\right)_\#(x)\right]_z = 0 \;\wedge\; \ldots\right] \\ & \vee \;\; \exists y_{y<x}\exists z_{z<x}\left[\left[\left(\; C_{TERM} \;\right)_\#(x)\right]_y = 0 \;\wedge\; \ldots\right] \end{aligned}$$

En forma similar ocurre en la prueba de que $FORM$ es una **RR**. Basta, para $y < x$ y para $z < y$, quitar $FORM(y)$ y $FORM(z)$ y poner en su lugar $\left[\left(\; C_{FORM} \;\right)_\#(x)\right]_y = 0$ y $\left[\left(\; C_{FORM} \;\right)_\#(x)\right]_z = 0$ respectivamente.