REPRESENTABILIDAD EN EL SISTEMA AP

Recordemos la definición –metalingüística– del *Numeral de un numero natural.* Ésta se dá recursivamente como sigue,

I. $\overline{0} \;=\; c_0$

II. $\overline{n^+} \;=\; f_s(\overline{n})$

Definición₁. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$. Diremos que R es *Expresable (en AP)* syss hay una $\alpha_R \in FRM_{AP}$ con exactamente n variables líbres, digamos $x_1, \ldots, x_n$ tal que cualesquiera sean $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, se tiene:

R$_1$. Si $R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\vdash_{AP} \alpha_R\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}\big)$, o

R$_2$. Si $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\vdash_{AP} \neg\alpha_R\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}\big)$.

Proposición₁. Sean $R,\, S \subseteq \mathbb{N}^n$ expresables en AP, entonces las relaciones $\neg R$, $R \vee S$ y $R \,\&\, S$ también son representables.

Definición₂. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, con $n > 0$. Diremos que f es *Representable en AP* syss hay una $\alpha_f \in FRM_{AP}$ con exactamente $n+1$ variables líbres, digamos $x_1, \ldots, x_n, y$ tal que cualesquiera sean $k_1, \ldots, k_n,\, m \in \mathbb{N}$, se tiene:

F$_1$. Si $f(k_1, \ldots, k_n) = m$, entonces $\vdash_{AP} \alpha_f\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n},\, y / \overline{m}\big)$. Y

F$_2$. $\vdash_{AP} \exists! y\, \alpha_f\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n},\, y\big)$.

Si en lugar de **F**$_2$. exigimos:

F'$_2$. $\vdash_{AP} \exists! y\, \alpha_f\big(x_1, \ldots, x_n,\, y\big)$.

Se dice que f es *Fuertemente Representable en AP*.

Proposición₁. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Tenemos que,

f es fuertemente representable en AP syss f es representable en AP.

Ejemplo$_{\mathbf{F}}$: (Las funciones iniciales son fuertemente representables)

1. La sucesor, $\_^{+}$, es representable por

$$\alpha_{\_^{+}}\big(v_0,\, v_1\big) \;\rightleftharpoons\; \big(f_s(v_0) \;\approx\; v_1\big)$$

2. La función constante cero, $Z(x) = C_0^1(x) = 0$, es representable por

$$\alpha_Z\big(v_0,\, v_1\big) \;\rightleftharpoons\; \big((v_0 \approx v_0) \;\&\; (v_1 \approx c_0)\big)$$

3. La función proyección, $\pi_k^n(x_1,\ldots,x_n) = x_k$ con $1 \leq k \leq n$, es representable por

$$\alpha_{\pi_k^n}\big(v_1,\ \ldots,\ v_n,\ v_{n+1}\big) \rightleftharpoons \Big((v_1 \approx v_1)\ \&\ \ldots\ \&\ (v_n \approx v_n)\ \&\ (v_{n+1} \approx v_k)\Big)$$

Proposición$_2$. La función $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es representable syss la relación

$$F = \Big\{\big\langle a_1,\ldots,a_n, f(a_1,\ldots,a_n)\big\rangle\ /\ a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N}\Big\}$$

es expresable.

Proposición$_3$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$. Tenemos que R es expresable syss su función característica, $\mathcal{C}_R$, es representable.

Prueba:

$\Rightarrow\big]$ Supongamos que R es expresable por la fórmula $\alpha_R(x_1,\ldots,x_n)$. Así, la función $\mathcal{C}_R$ es fuertemente representable por la fórmula

$$\Big(\alpha_R(x_1,\ldots,x_n)\ \&\ y \approx \overline{0}\Big) \vee \Big(\alpha_R(x_1,\ldots,x_n)\ \&\ y \approx \overline{1}\Big)$$

$\Leftarrow\big]$ Supongamos que $\mathcal{C}_R$ es fuertemente representable por la fórmula $\alpha_{\mathcal{C}_R}(x_1,\ldots,x_n,y)$. Así, la relación R es expresable por la fórmula

$$\alpha_{\mathcal{C}_R}(x_1,\ldots,x_n,\overline{0}\,)$$

†

Proposición$_4$.

1. Toda función recursiva primitiva es representable en AP.

2. Toda relación recursiva primitiva es expresable en AP.

Prueba: **2**. se sigue de **1**. y la proposición anterior. Ahora, para probar **1**. es suficiente probar, usando el principio de inducción inherente a la definición de función recursiva, que las funciones iniciales tienen la propiedad, es decir que son representables (esto ya lo tenemos, **Ejemplo**$_{\mathbf{F.3}}$) y que las operaciones de sustitución y recursión, la preservan, es decir, llevan de representables en representables. †

Proposición$_5$.

1. Toda función representable en AP es una función recursiva primitiva.

2. Toda relación expresable en AP es una relación recursiva primitiva.

Prueba: Esta se sale de nuestro alcance. †