# $\beta$ de Gödel

En esta sección construiremos el enunciado de Gödel el cual es un indecidible para nuestra axiomatización de la Aritmética, $AP$. Empezamos con la autoreferencia, o mejor dicho, con la "diagonalización".

**31**. $nml : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $nml(k)$ nos proporcional el número de secuencia del numeral del natural $k$, se decir: $nml(k) = g_2\left(\overline{k}\right)$. Esta es recursiva, pues:

$$\begin{aligned} nml(0) &= 2^{g_1(c_0)} \\ nml(k+1) &= 2^{g_1(f_s)} \star pp(nml(k)) \end{aligned}$$

**Definición$_1$**. Dada una fórmula $\alpha$, *la Diagonalización de $\alpha$ en la variable* $v_k$, es la fórmula que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias libres de $v_k$ en $\alpha$, por el numeral del número de secuencia de $\alpha$. Así, si $g_2(\alpha) = m$, entonces la diagonalización de $\alpha$ en $v_k$ es $\alpha\left(v_k / \overline{m}\right)$.

**32**. $diag : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Si $m$ es el número de secuencia de una fórmula, digamos $\alpha$, entonces $diag\left(m, k\right)$ nos dá el número de secuencia de la diagonalización de $\alpha$ *en* $v_k$. Es recursiva, pues:

$$diag\left(m, k\right) = sst\left(m, k, nml(m)\right)$$

**33**. $PR \subseteq \mathbb{N}^3$. Es la relación definida como sigue, $PR\left(n, m, k\right)$ syss $n$ es el número de gödel de una sucesión de fórmulas, $g_3$, la cual es una prueba, en el sistema $AP$, de la diagonalización de la formula con número de secuencia $m$, en la variable $v_k$. Esta es recursiva, pues:

$$PR\left(n, m, k\right) \quad \text{syss} \quad PRU\left(n, diag\left(m, k\right)\right)$$

Tenemos que $PR \subseteq \mathbb{N}^3$ y es recursiva, por tanto, es expresable en $AP$ por una fórmula con exactamente tres variables líbres, digamos $\alpha_{PR}\left(v_0, v_1, v_2\right)$. Así, si $n, m, k \in \mathbb{N}$, entonces:

**R$_1$** Si $PR\left(n, m, k\right)$, entonces $AP \vdash \alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n}, v_1 / \overline{m}, v_2 / \overline{k}\right)$, o

**R$_2$** Si $\neg PR\left(n, m, k\right)$, entonces $AP \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n}, v_1 / \overline{m}, v_2 / \overline{k}\right)$.

Consideremos ahora la siguiente fórmula, con $v_1$ como la única variable libre:

$$\beta(v_1) \rightleftharpoons \forall v_0 \neg\alpha_{PR}\left(v_0, v_1, v_2 / \overline{1}\right)$$

Ahora tomemos la digonalización de $\beta(v_1)$ en $v_1$ : Sea $g$ el número de secuencia de $\beta(v_1)$ es decir, $g = g_2(\beta(v_1))$ y obtenemos el enunciado:

$$\beta\left(v_1 / \overline{g}\right) \rightleftharpoons \forall v_0 \, \neg\alpha_{PR} \left(v_0,\, v_1 / \overline{g},\, v_2 / \overline{1}\right)$$

Llamado *"La $\beta$ de Gödel".* Que bajo la **interpretación canónica** (en $\mathbb{N}$) dice:

$$\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N},\, \neg PR\left(n,\, g,\, 1\right)$$

o,

$$\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N},\, \neg PRU\left(n,\, diag(g,1)\right)$$

La cual dice: " $diag(g,1)$ " es indemostrable, en $AP$ . Pero, $diag\left(g,\, 1\right) = g_2\left(\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)\right)$. Así,

" $\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$ es indemostrable en $AP$ "

Resumiendo,

$\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$ dice, bajo nuestra particular interpretación, "soy indemostrable, en $AP$"

Efectivamente $\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$ no se puede demostrar en $AP$ y no solo eso, tampoco se puede refutar, es decir su negación, $\neg\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$, también es indemostrable en $AP$. Es pues, un enunciado indecidible para $AP$. Todo bajo la suposición de "cierta" consistencia de $AP$. Esto es el **Primer Teorema de Incompletud de Gödel** (1931). Lo probaremos en dos oportunidades.

**Proposición$_{\aleph}$**. (Parte **I**).
Si $AP$ es consistente, entonces $AP \nvdash \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$.

**Prueba**: Se hará por contrapositiva.

Supongamos pues, que $AP \vdash \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$. Así, hay $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in FRM_{AP}$, que forman una demostración de $\alpha_k \rightleftharpoons \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$, en el sistema $AP$. Sea $n_0 = g_3(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, por tanto:

$$PRU\left(n_0,\, g_2\left(\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)\right)\right)$$

pero, ya que $g_2\left(\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)\right) = diag\left(g,\, 1\right)$, tenemos:

$$PRU\left(n_0,\, diag\left(g,\, 1\right)\right)$$

por lo tanto:

$$PR\left(n_0,\, g,\, 1\right)$$

Ahora bien, como $\alpha_{PR}$ expresa a $PR$ en $AP$, por $\mathbf{R_1}$, tenemos:

$$AP \vdash \alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n_0},\ v_1 / \overline{g},\ v_2 / \overline{1}\right)$$

que, por la regla $\exists$, tenemos:

$$AP \vdash \exists v_0 \alpha_{PR}\left(v_0,\ v_1 / \overline{g},\ v_2 / \overline{1}\right)$$

es decir,

$$AP \vdash \neg\forall v_0 \neg\alpha_{PR}\left(v_0,\ v_1 / \overline{g},\ v_2 / \overline{1}\right)$$

que no es otra cosa que,

$$AP \vdash \neg\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$$

Y así, $AP$ es inconsistente. †

**Corolario**. Si $AP$ es Consistente, entonces hay enunciados verdaderos, en la aritmética
– en $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0\rangle$ – que no son demostrables, es decir $AP$ es Incompleta Semánticamente.

Para la siguiente parte necesitamos introducir una nueva noción.

**Definición₂**. El sistema axiomático $AP$ es $\omega$–*Consistente* syss para cualquier fórmula $\varphi(x)$, se tiene que:

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi\left(x / \overline{n}\right)$, entonces $AP \nvdash \neg\forall x\, \varphi\left(\, x\, \right)$

**Observaciones**.

**a**). Son equivalentes:

**1**. $AP$ es $\omega$–Consistente.

**2**. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi\left(x / \overline{n}\right)$, entonces $AP \nvdash \exists x\, \neg\varphi(x)$. Esto, para cualquier fórmula $\varphi(x)$.

**3**. $AP \vdash \neg\forall x\, \varphi\left(\, x\, \right)$, entonces hay un $n \in \mathbb{N}$, $AP \nvdash \varphi\left(x / \overline{n}\right)$. Esto, para cualquier fórmula $\varphi(x)$.

**b**). $AP$ es $\omega$–Inconsistente syss hay una fórmula $\varphi(x)$ tal, que

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi\left(x / \overline{n}\right)$ y $AP \vdash \exists x\, \neg\varphi\left(\, x\, \right)$

**Proposición**. Si $AP$ es $\omega$–consistente, entonces $AP$ es consistente.
**Prueba**: Es inmediata por contrapositiva. †

**Proposición**$_{\aleph}$. (Parte **II**).

Si $AP$ es $\omega$–consistente, entonces $AP \nvdash \neg\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$.

**Prueba**: La prueba es directa. Supongamos pues, que $AP$ es $\omega$–consistente. Así $AP$ es consistente y por la primera parte, tenemos que $AP \nvdash \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$. Con esto tenemos que:

$$\neg PR\left(n,\ g,\ 1\right),\quad \text{para todo natural } n$$

Y puesto que $\alpha_{PR}$ Expresa a la relación $PR$ en $AP$, por $\mathbf{R_2}$, tenemos que:

$$\text{para cada natural } n,\ AP \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n},\ v_1 / \overline{g},\ v_2 / \overline{1}\right)$$

Ahora, si consideramos la fórmula $\varphi(v_0) \rightleftharpoons \neg\alpha_{PR}\left(v_0,\ v_1 / \overline{g},\ v_2 / \overline{1}\right)$ y aplicamos la $\omega$–consistencia de $AP$, obtenemos: $AP \nvdash \neg\forall v_0\, \neg\alpha_{PR}\left(v_0,\ v_1 / \overline{g},\ v_2 / \overline{1}\right)$, es decir:

$$AP \nvdash \neg\beta\left(v_1 / \overline{g}\right) \qquad \dagger$$

Podemos ahora enunciar el,

## **Primer Teorema de Incompletud de Gödel** (1931).

**I**. Si $AP$ es consistente, entonces $AP \nvdash \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$.

**II**: Si $AP$ es $\omega$–Consistente, entonces $AP \nvdash \neg\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$.

Por lo que, si $AP$ es $\omega$–Consistente, entonces $AP$ tiene un indecidible, a saber $\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$, y por tanto Incompleta -Sintácticamente.