Teorema de Gödel-Rosser
(Generalizado)

En 1936, Berkley Rosser modificó la construcción de Gödel y obtuvo un enunciado indecidible -para la Aritmética- en el cual solamente se exige la consistencia simple -y no la ω–consistencia- de AP. Veamos un tratamiento más general de su prueba.

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \left\{ f_s , f_+ , f_\cdot , c_0 \right\} \quad \text{y} \quad \left| \rho \right| \leq \aleph_0$$

Observación: Si $\left| \rho \right| \leq \aleph_0$, entonces $\left| \mathcal{L}_\rho \right| = \aleph_0$ y podemos construir una

$$g_1 : \mathcal{L}_\rho \rightarrowtail \left\{ 2n+1 \ / \ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

de tal suerte que dado un número impar sabemos perfectamente de quien es imagen. Y por tanto tener toda la numeración de Gödel, a saber g_2 y g_3.

Definición$_1$. Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Diremos que T es *Recursivamente Axiomatizable* syss hay un $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal, que $\Gamma^\vdash = T^\vdash$ y $\left\{ g_2(\sigma) \ / \ \sigma \in \Gamma \right\} = AxT$ es un conjunto (una Relación) Recursivo(a) (Primitivo(a)).

Observación: Si T es Recursivamente Axiomatizable, entonces son Relaciones Recursivas (Primitivas):

30. $PRU\big(n, m\big)$ y

33. $PR\big(n, m, k\big)$ $\big($ syss $PRU\big(n, diag\big(m, k\big)\big)$ $\big)$.

Proposición. (**Teorema de Gödel–Rosser**)
Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal que:

1. T es Recursivamente Axiomatizable,
2. Toda Relación (Función) Recusiva es Expresable (Representable) en T.
3. **i**). Para toda ρ–fórmula con exactamente una variable líbre, digamos $\varphi(x)$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \varphi\big(x / \overline{0}\big) \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi\big(x / \overline{k}\big) \rightarrow \forall x\big(x \leq \overline{k} \rightarrow \varphi(x) \big)$$

ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \forall x\Big(x \leq \overline{k} \ \vee \ \overline{k} \leq x \Big)$$

Así, si T es Consistente, entonces T tiene un Indecidible y por tanto es Incompleta.

Lo primero que hay que observar es que nuestro sistema AP, cumple con lo requerido y lo segundo, es que la relación PR es Expresable en cualquier T que cumpla con lo dispuesto y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que lo Expresa la fórmula $\alpha_{PR}(v_0, v_1, v_2)$.

Prueba: Consideremos la siguiente relación:

34. Sea $PRN \subseteq \mathbb{N}^3$ definida como sigue: $PRN(n, m, k)$ syss n es el número de gödel de una sucesión finita de fórmulas, la cual es una prueba, en T, de la **negación** de la diagonalización de la formula con número de secuencia m, en la variable v_k. Esta es recursiva, pues:

$$PRN(n, m, k) \text{ syss } PRU(n, neg(diag(m, k)))$$

Por tanto, es representable en el sistema T, digamos por la ρ–fórmula $\alpha_{PRN}(v_0, v_1, v_2)$. Ahora consideremos la siguiente ρ–fórmula con v_1 como única variable líbre:

$$\gamma(v_1) \rightleftharpoons \forall v_0\left[\alpha_{PR}(v_0, v_1, v_2 / \overline{1}) \rightarrow \neg\forall v_l\left(v_l \leq v_0 \rightarrow \neg\alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1, v_2 / \overline{1})\right)\right]$$

donde v_l es la primera variable que no ocurre ni en α_{PR} ni en α_{PRN}.

Ahora tomemos la digonalización de $\gamma(v_1)$ en v_1 : Sea r el número de secuencia de $\gamma(v_1)$, es decir, $r = g_2(\gamma(v_1))$ y obtenemos el enunciado:

$$\gamma(v_1 / \overline{r}) \rightleftharpoons \forall v_0\left[\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \overline{r}, v_2 / \overline{1}) \rightarrow \exists v_l\left(v_l \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1 / \overline{r}, v_2 / \overline{1})\right)\right]$$

Llamado *"El enunciado de Rosser".* (¿Qué dice?)

Las siguientes observaciones nos serán útiles más adelante: Para un $n \in \mathbb{N}$,

$(\mathbf{O}_1)$ $PR(n, r, 1)$ syss n es el número de gödel de una prueba, en T, de $\gamma(v_1 / \overline{r})$.

$(\mathbf{O}_2)$ $PRN(n, r, 1)$ syss n es el número de gödel de una prueba, en T, de $\neg\gamma(v_1 / \overline{r})$.

Af$_1$. Si T es consistente, entonces $T \nvdash \gamma(v_1 / \overline{r})$.

Af$_2$. Si T es consistente, entonces $T \nvdash \neg\gamma(v_1 / \overline{r})$.

Prueba de Af$_1$: **TAREA**.

Prueba de Af$_2$: (Por reducción a lo absurdo). Supongamos pues, que T es consistente y con la intensión de llegar a una contradicción, supongamos:

$$T \vdash \neg\gamma\left(v_1 / \overline{r}\right) \quad \text{..}(*)$$

Así, hay un $k \in \mathbb{N}$, que corresponde a la prueba, en T, de $\neg\gamma\left(v_1 / \overline{r}\right)$. De (**O**$_2$) tenemos que $PRN\left(k,\ r,\ 1\right)$ y por la expresabilidad de PRN en T, tenemos que:

$$T \vdash \alpha_{PRN}\left(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \quad \text{.................................}(**)$$

De esto podemos obtener,

$$T \vdash \overline{k} \le v_0 \rightarrow \exists v_l\left(v_l \le v_0 \ \ \&\ \ \alpha_{PRN}\left(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\right) \quad \text{.............}(\bigstar)$$

pues:

1. $\overline{k} \le v_0$ .... Hip.
2. $\alpha_{PRN}\left(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)$ .... $(**)$
3. $\overline{k} \le v_0 \ \&\ \alpha_{PRN}\left(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)$ .... de 1 y 2
4. $\exists v_l\left(v_l \le v_0 \ \ \&\ \ \alpha_{PRN}\left(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\right)$ ....Regla $\exists$

Con esto tenemos: $T \cup \left\{\overline{k} \le v_0\right\} \vdash \exists v_l\left(v_l \le v_0 \ \ \&\ \ \alpha_{PRN}\left(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\right)$. Y usando el metateorema de la dedución, obtenemos lo que queríamos.

Por otro lado, puesto que T es consistente y de $(*)$, tenemos que:

$$T \nvdash \gamma\left(v_1 / \overline{r}\right)$$

Así, por (**O**$_1$), tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\neg PR\left(n,\ r,\ 1\right)$. De esto y la representabilidad de PR en T, tenemos que: para todo $n \in \mathbb{N}$, $T \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)$. En particular para los primeros $k+1$ naturales y por tanto:

$$T \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{0},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \ \&\ \ \ldots \ \ \& \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{k},\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)$$

Y puesto que T cumple con la propiedad **3.i**), usando Modus Ponens y después el Axioma de Particularización (**AL$_4$**), obtenemos:

$$T \vdash v_0 \le \overline{k} \rightarrow \neg\alpha_{PR}\left(v_0,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \quad \text{..........................}(\bigstar\bigstar)$$

Ahora bien, T cumple con la propiedad **3.ii**) y si ésta la particularizamos, obtenemos:

$$T \vdash \left(v_0 \le \overline{k}\right) \vee \left(\overline{k} \le v_0\right)$$

De esto, $(\bigstar)$ y $(\bigstar\bigstar)$ obtenemos:

$$T \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right) \vee \exists v_l\left(v_l \le v_0 \ \ \&\ \ \alpha_{PRN}\left(v_0 / v_l,\ v_1 / \overline{r},\ v_2 / \overline{1}\right)\right)$$

Finalmente, usando generalización y algunas convenciones:

$$T \vdash \forall v_0 \Big[\alpha_{PR}\big(v_0,\, v_1 / \overline{r},\, v_2 / \overline{1}\big) \rightarrow \exists v_l \Big(v_l \leq v_0 \;\;\&\;\; \alpha_{PRN}\big(v_0 / v_l,\, v_1 / \overline{r},\, v_2 / \overline{1}\big)\Big)\Big]$$

es decir, $T \vdash \gamma\big(v_1 / \overline{r}\big)$, lo cual contradice la consistencia de T. †

Corolario. El Teorema de Gödel-Rosser es cierto para la Aritmética de Peano, AP.

Si AP es Consistente, entonces es Incompleta.

Corolario. Si T es una extensión recursiva de AP, entonces es válido el Teorema de Gödel–Rosser para T. Explícitamente:

Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ tal que,

i). $\Gamma^{\vdash} \supseteq AP$. Y

ii). $\big\{ g_2(\sigma) \;/\; \sigma \in \Gamma \big\}$ es un conjunto Recursivo (Primitivo),

Así, si Γ es consistente, entonces Γ es incompleto.

Solo recordamos que hay una petición inicial al Lenguaje Formal; se considera un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \{ f_s\,,\, f_+\,,\, f_\cdot\,,\, c_0 \} \text{ y } \big|\, \mathcal{L}_\rho \,\big| = \aleph_0$$