Lema de Diagonalización

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \{f_s\,, f_+\,, f_\cdot\,, c_0\} \quad \text{y} \quad \left| \; \rho \; \right| \leq \aleph_0$$

Sea $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ recursivamente axiomatizable en el que toda Relación (Función) Recusiva (Primitiva) es Expresable (Representable) en T.

Recordemos:

- Dada una fórmula α, *la Diagonalización de α en v_k*, es la fórmula que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias libres de la variable v_k en α por el numeral del número de secuencia de α. Así, si $g_2(\alpha) = m$ entonces la diagonalización de α en v_k es $\alpha\left(v_k / \overline{m}\right)$.

- $diag : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Si m es el número de secuencia de una fórmula, digamos α, entonces $diag(m,k)$ nos dá el número de secuencia de la diagonalización de α *en* v_k. Es decir, si $g_2(\alpha) = m$, entonces $diag(m,k) = g_2\left(\alpha\left(v_k / \overline{m}\right)\right)$.

De ahora en adelante nos fijaremos especialmente en fórmulas con exactamente una variable líbre y sin pérdida de generalidad, fijemosla en la variable v_1. Siendo consecuentes, la diagonalización de estas fórmulas se reducirá a dicha variable. Y nos referiremos a ella con el simple nombre de: *“La diagonalización”.*

Pongamos nueva notación y convenciones:

1. Sea φ es una fórmula con v_1 como única variable libre. Este hecho lo denotaremos poniendo $\varphi(v_1)$ o simplemente φ. Así como también escribiremos $\varphi(t)$ para denotar la sustitución de todas las ocurrencias líbres de v_1 por t en φ –en lugar de $\varphi\left(v_1 / t\right)$.

2. Si e es una ρ–expresión, el símbolo $\ulcorner e \urcorner$ denotará el numeral del número de secuencia de e. Así, si $g_2(e) = k$, entonces $\ulcorner e \urcorner = \overline{k} = \overline{g_2(e)}$. Podríamos pensar que $\ulcorner e \urcorner$ es un *“nombre”* para e dentro del mismo lenguaje –de $\mathcal{L}_\rho$.

Como ejemplo, la diagonalización de α queda expresada como $\alpha(\ulcorner \alpha \urcorner)$; en paticular, la β de Gödel queda como $\beta(\ulcorner \beta \urcorner)$.

Definimos ahora una nueva función, la cual es recursiva.

35. La función $dg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ trabaja de la siguiente manera: Si m es el número de secuencia de una fórmula, digamos α, entonces $dg(m)$ nos dá el número de secuencia de la diagonalización de α; es decir si $g_2(\alpha) = m$, entonces

$dg(m) = g_2(\alpha(\ulcorner\alpha\urcorner))$. Es recursiva, pues:

$$dg(m) = diag(m,1) = sst(m,1,nml(m))$$

Con esto tenemos que la función dg es representable, en T, por una fórmula con exactamente dos variables libres, digamos por $\delta(v_1,v_2)$, con la propiedad de que cualesquiera sean m, $n \in \mathbb{N}$, si $dg(m) = n$, entonces

F$_1$ $T \vdash \delta\left(\overline{m},\ \overline{n}\right)$, y

F$_2$ $T \vdash \forall v_2\Big(\delta\left(\overline{m},\ v_2\right) \rightarrow v_2 \approx \overline{n}\Big)$

Proposición. *(Lema de Diagonalización)*.

Para cada ρ–fórmula φ, la cual v_1 es la única variable líbre, existe un ρ–enunciado σ, tal que:

$$T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$$

(De modo sugerente, aunque impreciso, podríamos leer esto como: "demostrablemente en T, el enunciado σ dice de sí misma que tiene la propiedad expresada por φ".)

Prueba: Sea φ una ρ–fórmula con v_1 como su única variable líbre. Consideremos la fórmula

$$\psi(v_1) \rightleftharpoons \forall v_2\ \left(\ \delta(v_1,v_2) \rightarrow \varphi(v_2)\ \right)$$

El enunciado buscado σ, es la diagonalización de ψ. Hagámoslo explícito; sea $m = g_2(\psi)$ y así:

$$\sigma \rightleftharpoons \psi(\overline{m}) \rightleftharpoons \forall v_2\ \Big(\delta(\overline{m},v_2)\ \rightarrow\ \varphi(v_2)\Big)$$

Consideremos ahora a $n = g_2(\sigma)$. Así, $\overline{n} = \overline{g_2(\sigma)} = \ulcorner\sigma\urcorner$ y $dg(m) = n$. Puesto que δ representa a dg en T, por **F**$_1$, tenemos que $T \vdash \delta(\overline{m},\overline{n})$. Con esto nos ayudamos para obtener la primera parte del resultado:

$$T \vdash \forall v_2\Big(\delta(\overline{m},v_2)\ \rightarrow\ \varphi(v_2)\Big) \rightarrow \varphi(\overline{n}) \text{..................................} (\bigstar)$$

Pues consideremos la siguiente deducción en T :

1. $\forall v_2\left(\ \delta(\overline{m},v_2) \rightarrow \varphi(v_2)\ \right)$..Hipótesis.

2. $\delta(\overline{m},\overline{n}) \rightarrow \varphi(\overline{n})$.. particularización a **1**

3. $\delta(\overline{m},\overline{n})$... Teorema (**F**$_1$)

4. $\varphi(\overline{n})$ .... MP **3**,**2**

Por tanto, $T, \forall v_2(\delta(\overline{m}, v_2) \to \varphi(v_2)) \vdash \varphi(\overline{n})$, y utilizando el **M**.**T**.**D**. tenemos lo que se quería.

La otra parte. De la representabilidad de dg, en su parte $\mathbf{F}_2$, y teniendo en cuenta que $dg(m) = n$, obtenemos que $T \vdash \forall v_2\big(\, \delta(\overline{m}, v_2) \to v_2 \approx \overline{n}\, \big)$ y de esto,

$$T \vdash \varphi(\overline{n}) \to \forall v_2\Big(\delta(\overline{m}, v_2) \to \varphi(v_2)\Big) \quad \ldots\ldots (\bigstar\bigstar)$$

Considere la siguiente deducción:

1. $\forall v_2\big(\, \delta(\overline{m}, v_2) \to v_2 \approx \overline{n}\, \big)$ .... Teorema ($\mathbf{F}_2$)

2. $\delta(\overline{m}, v_2) \to v_2 \approx \overline{n}$ .... particularización a **1**

3. $\delta(\overline{m}, v_2)$ .... Hipótesis

4. $v_2 \approx \overline{n}$ .... M.P. **3**,**2**

5. $(v_2 \approx \overline{n}) \to (\varphi(\overline{n}) \to \varphi(v_2))$ .... Instancia del $\mathbf{AL}_7$

6. $\varphi(\overline{n}) \to \varphi(v_2)$ .... M.P. **4**,**5**

7. $\varphi(\overline{n})$ .... Hipótesis.

8. $\varphi(v_2)$ .... M.P. **7**,**6**

Por tanto, tenemos: $T,\ \varphi(\overline{n}),\ \delta(\overline{m}, v_2) \vdash \varphi(v_2)$. Usando el **M**.**T**.**D**. y generalización, obtenemos: $T,\ \varphi(\overline{n}) \vdash \forall v_2(\delta(\overline{m}, v_2) \to \varphi(v_2))$ y nuevamente usando el **M**.**T**.**D**., obtenemos lo que queríamos.

Finalmente, de ($\bigstar$), ($\bigstar\bigstar$) y si tomamos en cuenta que $\overline{n} = \ulcorner\sigma\urcorner$, obtenemos: $T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner)$ lo cual queríamos demostrar. †

Aplicaciones:

- **Primer teorema de incompletud de Gödel** (1931).

$PRU \subseteq \mathbb{N}^2$ es recursiva y por tanto expresable en T por una fórmula con exactamente dos variables libres, digamos $\alpha_{PRU}(v_1, v_2)$. Al aplicar el Lema Diagonal a la fórmula:

$$\varphi(v_1) \rightleftharpoons \forall v_0\, \neg\alpha_{PRU}(v_0, v_1)$$

obtenemos que hay un ρ–enunciado γ con la propiedad,

$$T \vdash \gamma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\gamma\urcorner)$$

Así, si T es ω–consistente, entonces T tiene un indecidible, a saber $\gamma,$ y por tanto T es incompleto.
Prueba: **TAREA**. †

- **Teorema de Church** (1936)(1):

Si T es consistente, el conjunto de números de gödel (secuencia) de sus teoremas, **no** es recursivo.
Prueba: Procederemos por contrapositiva. Sea $TEO \subseteq \mathbb{N},$ definida como sigue:

$$TEO = \left\{ m \in \mathbb{N} \ / \ \exists\alpha \in FRM_\rho\Big(g_2(\alpha) = m \ \& \ T \vdash \alpha \Big)\right\}$$

Supongamos pues que, TEO es recursivo. Por tanto, será Expresable en T por una fórmula con exactamente una variables, digamos $\tau(v_1).$ Tenemos que cualquiera sea $\alpha \in FRM_\rho,$ se tiene:

R$_1$ Si $T \vdash \alpha,$ entonces $T \vdash \tau(\ulcorner\alpha\urcorner).$ Y

R$_2$ Si $T \nvdash \alpha,$ entonces $T \vdash \neg\tau(\ulcorner\alpha\urcorner).$

Consideremos la ρ–fórmula:

$$\neg\tau(v_1)$$

Por el Lema de Diagonalización, hay un ρ–enunciado $\sigma,$ tal que:

$$T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\tau(\ulcorner\sigma\urcorner) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Con respecto a la demostrabilidad de σ en $T,$ tenemos dos casos:

i). $T \vdash \sigma \underset{\mathbf{R}_1}{\Rightarrow} T \vdash \tau(\ulcorner\sigma\urcorner) \underset{(*)}{\Rightarrow} T \vdash \neg\sigma.$ Concluimos que T es inconsistente.

ii). $T \nvdash \sigma \underset{\mathbf{R}_2}{\Rightarrow} T \vdash \neg\tau(\ulcorner\sigma\urcorner) \underset{(*)}{\Rightarrow} T \vdash \sigma.$ Lo cual nos lleva al caso anterior y por tanto T sería inconsistente.

Resumiendo, si TEO es recursivo, entonces T es inconsistente. †

(1) CHURCH, ALONZO; *An unsolvable problem of elementary number theory*. The Journal of Symbolic Logic, 58: pp. 345–363, 1936.