Reductos de la Aritmética

Profr. Rafael Rojas Barbachano
Ay. Manuel Zorrilla Noriega

Nuestro propósito es estudiar algunos reductos de la estructura elemental $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; s_\mathbb{N}, +_\mathbb{N}, \cdot_\mathbb{N}, 0_\mathbb{N} \rangle$, que es la que denominamos *la aritmética*, y que es de tipo $\rho_A = \{s, +, \cdot, 0\}$. Una de las posibles formulaciones del teorema de incompletud de la aritmética de Kurt Gödel es que la teoría de la aritmética, Th $\mathfrak{N}$, no es axiomática, es decir, que no es posible dar un conjunto de enunciados de $\mathscr{L}_A$ (el lenguaje de tipo ρ_A) verdaderos en $\mathfrak{N}$ que sea un conjunto de axiomas para Th $\mathfrak{N}$. Veremos que, si nos restringimos a ciertos sublenguajes del lenguaje de la aritmética, las teorías de las estructuras resultantes (es decir, de los reductos correspondientes) sí son axiomáticas.

Daremos por conocidas las definiciones de teoría, teoría completa, categoricidad y varios resultados elementales relativos a esos conceptos, tales como el test de Vaught-Łoś, así como algunas nociones de aritmética cardinal.

1. La Estructura $\mathfrak{N}_s$

El primer reducto de la aritmética que estudiaremos es el reducto al tipo de semejanza $\rho_s = \{s, 0\}$, que es $\mathfrak{N}_s = \langle \mathbb{N}; s_\mathbb{N}, 0_\mathbb{N} \rangle$. En este lenguaje restringido aún tenemos a los numerales, $\bar{n}$, que dan nombre a cada $n \in \mathbb{N}$. Propongamos una axiomatización de Th $\mathfrak{N}_s$. Consideremos los siguientes enunciados de tipo ρ_s:

$$\begin{array}{rcl}
s1 & \risingdotseq & \forall x(sx \neq 0) \\
s2 & \risingdotseq & \forall x \forall y(sx = sy \to x = y) \\
s3 & \risingdotseq & \forall y(y \neq 0 \to \exists x(y = sx)) \\
s4.1 & \risingdotseq & \forall x(sx \neq x) \\
s4.2 & \risingdotseq & \forall x(ssx \neq x) \\
\dots & & \\
s4.n & \risingdotseq & \forall x(s^n x \neq x) \\
\dots & &
\end{array}$$

Sea $A_s = \{s1, s2, s3\} \cup \{s4.n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. Evidentemente, $A_s \subseteq$ Th $\mathfrak{N}_s$ y A_s es decidible. Entonces, tenemos que Cn $A_s \subseteq$ Th $\mathfrak{N}_s$. El objetivo de esta sección es hacer ver que se da la igualdad. Lo haremos de dos maneras diferentes.

Preguntémonos qué forma tiene un modelo arbitrario, digamos $\mathfrak{A} = \langle A; s^\mathfrak{A}, 0^\mathfrak{A} \rangle$, de A_s. Por $s1$, $s2$ y $s3$ podemos saber que $s^\mathfrak{A}$ es una biyección de A en $A \backslash \{0^\mathfrak{A}\}$.

Además, $s4.n$ prohíbe la existencia de lazos de tamaño n. Así, en A están los puntos "estándar" $0^{\mathfrak{A}} \to \bar{1}^{\mathfrak{A}} \to \bar{2}^{\mathfrak{A}} \to \ldots$, distintos todos (aquí las flechas indican la acción de $s^{\mathfrak{A}}$). Ahora, pueden o no haber otros puntos. Si hay otro punto a en A, estará también su sucesor, y también el sucesor de éste, etc. Además, como por $s3$ todo individuo distinto de $0^{\mathfrak{A}}$ tiene un predecesor (que por $s3$ es único), en A debe estar el predecesor de a, el predecesor de éste, etc. Todos éstos son distintos, ya que si no lo fueran habría un lazo finito. Así, a pertenece a una "$\mathbb{Z}$-cadena" de la forma $\ldots * \to * \to a \to s^{\mathfrak{A}}(a) \to s^{\mathfrak{A}}(s^{\mathfrak{A}}(a)) \to \ldots$ (así llamada porque sus puntos están dispuestos como los números enteros). Puede haber cualquier cantidad de $\mathbb{Z}$-cadenas, pero deben ser ajenas dos a dos (ya que $s2$ prohibe que se junten), y cada una debe ser ajena de la parte estándar (por la misma razón y por $s1$). Si hay una cantidad contable de $\mathbb{Z}$-cadenas, entonces A es contable. En general, si el conjunto de $\mathbb{Z}$-cadenas tiene cardinalidad λ, entonces el número de puntos en A es $\aleph_0 + \aleph_0 \cdot \lambda = \text{máx}\{\aleph_0, \lambda\}$. Así, tenemos que $|A| = \begin{cases} \aleph_0 & \text{si } \mathfrak{A} \text{ tiene una cantidad contable de } \mathbb{Z}\text{-cadenas,} \\ \lambda & \text{si } \mathfrak{A} \text{ tiene una cantidad incontable } \lambda \text{ de } \mathbb{Z}\text{-cadenas.} \end{cases}$

Proposición 1.1. *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ son modelos de A_s que tienen la misma cantidad de $\mathbb{Z}$-cadenas, entonces son isomorfos.*

Demostración. Hay un único isomorfismo entre la parte estándar de $\mathfrak{A}$ y la de $\mathfrak{A}'$ (a saber, $\bar{n}^{\mathfrak{A}} \mapsto \bar{n}^{\mathfrak{A}'}$, para cada $n \in \mathbb{N}$). Tenemos, por hipótesis, una biyección entre el conjunto de $\mathbb{Z}$-cadenas de $\mathfrak{A}$ y el de $\mathfrak{A}'$, por lo que cada $\mathbb{Z}$-cadena de $\mathfrak{A}$ está apareada con una de $\mathfrak{A}'$. Claramente, dos $\mathbb{Z}$-cadenas cualesquiera son isomorfas. Aceptando el axioma de elección, podemos combinar todos los isomorfismos individuales para obtener un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$. $\square$

Corolario 1.2. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos incontables de A_s tales que $A \sim B$. Entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Demostración. Atendiendo a lo arriba discutido, la cantidad de $\mathbb{Z}$-cadenas de $\mathfrak{A}$ es $|A|$, mientras que la de $\mathfrak{B}$ es $|B|$, y estos cardinales coinciden por hipótesis. El resultado es inmediato de la proposición anterior. $\square$

Teorema 1.3. *Cn A_s es una teoría completa.*

Demostración. Observemos que A_s no tiene modelos finitos (pues la parte estándar de cualquier modelo es infinita). El corolario anterior dice que Cn A_s es una teoría κ-categórica para cualquier cardinal $\kappa > \aleph_0$. Entonces, como ρ_s es finito, el test de Vaught-Łoś garantiza la completez de Cn A_s. $\square$

Probaremos ahora este último resultado por un camino radicalmente distinto. Introduzcamos primero el concepto de *eliminación de cuantificadores*.

Definición 1.4. *Sean ρ un tipo de semejanza, y T una ρ-teoría. Decimos que T **admite eliminación de cuantificadores** si y sólo si para toda $\varphi \in \Phi_\rho$ hay $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.*

Veamos que, para verificar que una teoría admite eliminación de cuantificadores, basta considerar fórmulas φ que tengan una forma particular.

Proposición 1.5. *Sean ρ un tipo de semejanza, y T una ρ-teoría. Supongamos que para toda $\varphi \in \Phi_\rho$ de la forma $\exists x(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, donde cada α_i es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica, hay $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Entonces, T admite eliminación de cuantificadores.*

Demostración. Consideremos primero el caso de que φ sea de la forma $\exists x\theta$, θ sin cuantificadores. Escribimos a θ en forma normal disyuntiva. La fórmula resultante tendrá la forma $\exists x[(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \vee (\beta_0 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \vee \ldots \vee (\xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_t)]$, que es lógicamente equivallente a $\exists x(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \vee \exists x(\beta_0 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \vee \ldots \vee \exists x(\xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_t)$. Por hipótesis, cada disyunto de esta fórmula puede ser reemplazado por una fórmula sin cuantificadores.

Sea ahora $\varphi \in \Phi_\rho$ arbitraria. Veamos, por inducción sobre la formación de φ, que hay $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$. El caso atómico, el de la negación y el de la implicación no presentan dificultad. Supngamos que $\varphi \leftrightharpoons \exists x\alpha$. Por hipótesis de inducción, hay $\beta \in \Phi_\rho$, β sin cuantificadores, tal que $T \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$. Por ser enunciados los elementos de T, tenemos que $T \models (\exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta)$. Ahora, el proceso descrito arriba para el caso particular proporciona $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que $T \models (\exists x\beta \leftrightarrow \psi)$. Por lo tanto, $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$. □

Veamos qué forma toma la definición de eliminación de cuantificadores en el caso de que T sea la teoría de una estructura.

Lema 1.6. *Sean ρ un tipo de semejanza y $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Th $\mathfrak{A}$ admite eliminación de cuantificadores si y sólo si para toda $\varphi \in \Phi_\rho$ hay $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que φ y ψ son eqivalentes en $\mathfrak{A}$, es decir, $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[s]$ para toda $s \in {}^{VAR}A$.*

Demostración. La necesidad es inmediata de la definición de eliminación de cuantificadores. Veamos la suficiencia. Sea $\varphi \in \Phi_\rho$. Queremos exhibir $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que Th $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Tenemos $\psi \in \Phi_\rho$, ψ sin cuantificadores, tal que $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[s]$ para toda $s \in {}^{VAR}A$, es decir, $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, cosa que es equivalente a que $\mathfrak{A} \models \mathrm{cl}(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Ahora, como Th $\mathfrak{A}$ es una teoría completa, para todo modelo $\mathfrak{B}$ de Th $\mathfrak{A}$ se tiene que Th $\mathfrak{A}=$ Th $\mathfrak{B}$ (pues una teoría completa es la teoría de cualquiera de sus modelos), es decir, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Entonces, como las clausuras son enunciados, $\mathfrak{B} \models \mathrm{cl}(\varphi \leftrightarrow \psi)$, y eso ocurre si y sólo si $\mathfrak{B} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, es decir, $\mathfrak{B} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[t]$ para toda $t \in {}^{VAR}B$. □

Apliquemos ahora la técnica de eliminación de cuantificadores.

Teorema 1.7. *Th $\mathfrak{N}_s$ admite eliminación de cuantificadores.*

Demostración. En virtud de la última proposición, basta considerar una fórmula de $\mathscr{L}_{\rho_s}$, digamos $\varphi \leftrightharpoons \exists x(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, donde cada α_i es atómica o la negación de una fórmula atómica. Describiremos cómo reemplazar a φ por una fórmula $\psi \in \Phi\rho_s$ que no tenga cuantificadores y que sea equivalente a φ en $\mathfrak{N}_s$. Notemos, a lo largo de la prueba, que tal equivalencia es consecuencia de A_s.

En $\mathscr{L}_{\rho_s}$ los únicos términos son de la forma $s^k u$, donde $k \in \mathbb{N}$ y u es el símbolo 0 o una variable, y las únicas fórmulas atómicas son igualdades entre términos. Podemos suponer que la variable x aparece en cada α_i, ya que si x no aparece en α, entonces $\exists x(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \wedge \exists x \beta$ y $\exists x \alpha \equiv \alpha$. Así, cada α_i tiene la forma $s^m x = s^n u$ o la negación de esta igualdad, donde u es 0 o una variable. Es más, podemos suponer que u no es x, ya que $s^m x = s^n x$ puede ser reemplazada por $0 = 0$ si $m = n$, y por $0 \neq 0$ si $m \neq n$ (esto último en virtud de $s4.|m-n|$).

En caso de que cada α_i sea la negación de una igualdad, φ es una consecuencia de A_s (ya que $s1$ y $s2$ obligan a que haya una infinidad de puntos estándar) y podemos tomar $\psi \fallingdotseq 0 = 0$. Supongamos pues que por lo menos una α_i no es una negación, digamos $\alpha_0 \fallingdotseq s^m x = t$, donde x no aparece en el término t. Si $m = 0$, reemplazamos α_0 por $0 = 0$ (pues tendríamos $\alpha_0 \fallingdotseq x = t$), y si $m \neq 0$, reemplazamos a α_0 por $t \neq 0 \wedge \ldots \wedge t \neq s^{m-1}0$ (ya que la solución para x no puede ser negativa). En las demás α_j reemplazamos, digamos, $s^k x = u$ primero por $s^{k+m} x = s^m u$ y luego por $s^k t = s^m u$. Obtenemos entonces una fórmula en la que x no aparece, así que podemos omitir el cuantificador. Tomamos la fórmula resultante como ψ.

Veamos con detalle que el sistema A_s justifica las sustituciones que hiciimos. Basta estudiar los cambios que hicimos en α_0, porque los demás son claros (en virtud de $s2$). El caso $m = 0$ no presenta dificultad. Si $m \neq 0$, hay que ver que $A_s \models \exists x(s^m x = t) \leftrightarrow t \neq 0 \wedge \ldots \wedge t \neq s^{m-1}0$. Abusando del lenguaje y de la notación para agilizar la deducción, podemos decir que si hay x tal que $s^m x = t$, entonces por $s1$, $t \neq 0$, y entonces por $s3$ hay x_1 tal que $t = sx_1$, por lo que $s^m x = t = sx_1$, de donde por $s2$, $s^{m-1}x = x_1$, y entonces por $s1$, $x_1 \neq 0$, de donde por $s2$, $t = sx_1 \neq s0$. Como $x_1 \neq 0$, $s3$ da $x2$ tal que $x_1 = sx_2$, de donde $s^m x = t = sx_1 = s^2 x_2$ y por lo tanto por $s2$, $s^{m-2}x = x_2$, de donde por $s1$, $x_2 \neq 0$, y entonces por $s2$, $t = s^2 x_2 \neq s^2 0$... Repitiendo el argumento m veces, obtenemos $t \neq 0 \wedge \ldots \wedge t \neq s^{m-1}0$. Recíprocamente, si tenemos $t \neq 0 \wedge \ldots \wedge t \neq s^{m-1}0$, entonces como $t \neq 0$, por $s3$ hay x_1 tal que $t = sx_1$, pero entonces $sx_1 = t \neq s0$, y así tenemos $x_1 \neq 0$, de donde por $s3$ hay x_2 tal que $x_1 = sx_2$, por lo que tenemos $s^2 x_2 = sx_1 = t \neq s^2 0$, y así $x_2 \neq 0$... Repitiendo el argumento m veces, obtenemos x_m tal que $t = s^m x_m$. □

Notemos que en la demostración del teorema anterior, la ψ obtenida tiene a lo más las variables libres de φ (así que si φ era enunciado, ψ también lo es), y además que $A_s \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, cosa que nos permitirá probar la completez de Cn A_s sin apelar a las $\mathbb{Z}$-cadenas ni al test de Łoś-Vaught (y de hecho sin usar el axioma de elección).

Corolario 1.8. *(a) Cn A_s es una teoría completa y decidible.*

(b) Cn A_s = Th $\mathfrak{N}_s$.

(c) Th $\mathfrak{N}_s$ es una teoría axiomática.

Demostración. (a) Veremos que un enunciado arbitrario de $\mathscr{L}_{\rho_s}$ pertenece o no a Cn A_s, dando un procedimiento algorítmico que diga cuál de las dos ocurre. Sea pues $\sigma \in \mathscr{L}^0_{\rho_s}$. El proceso de eliminación de cuantilficadores, que es algorítmico, nos da un *enunciado* τ sin cuantificadores tal que $A_s \models (\sigma \leftrightarrow \tau)$. Demos un procedimiento, también algorítmico, que arroje que $A_s \models \tau$ o que $A_s \models \neg\tau$. Podemos estar seguros de que τ está formado a partir de enunciados atómicos mediante conectivos lógicos. Un enunciado atómico de $\mathscr{L}_{\rho_s}$ debe ser de la forma $\bar{k} = \bar{l}$, que es deducible a partir de A_s si $k = l$, pero es refutable (es decir, su negación es deducible) a partir de A_s si $k \neq l$ (por $s1$ y $s2$). Apelando a lo que sabemos de lógica proposicional, como cada enunciado atómico puede ser deducido o refutado, A_s prueba o refuta a τ, y podemos saber cuál de las dos ocurre de manera algorítmica. Así, hay un procedimiento algorítmico que responde que $A_s \models \sigma$ o que $A_s \models \neg\sigma$.

(b) Ya sabemos que una teoría completa es la teoría de cualquiera de sus modelos.

(c) Se sigue de (b) y de la decidibilidad, ya observada, de A_s. Además, toda teoría decidible es, trivialmente, axiomática.

$\square$

2. La Estructura $\mathfrak{N}_<$

Cuando se propuso en clase una axiomatización de la aritmética, se definió, para t, s términos de $\mathscr{L}_A$, $t < s$ como una abreviatura de la fórmula $\exists w(w \neq 0 \land t{+}w = s)$, donde w es la primera variable que no aparece en t ni en s. Es claro que perfectamnete podríamos considerar a $<$ como una letra predicativa binaria de ρ_A, que se interpretara como la relación de orden en $\mathfrak{N}$ (agregando la definición de $<$ como un nuevo axioma, digamos $\forall x\forall y(x < y \leftrightarrow \exists w(w \neq 0 \land t + w = s)))$. De ahora en adelante, consideremos a $\mathscr{L}_A$ expandido de esa manera.

Una vez adoptadas las convenciones necesarias, podemos considerar la estructura $\mathfrak{N}_< = \langle \mathbb{N}; <_\mathbb{N}, s_\mathbb{N}, 0_\mathbb{N}\rangle$, que es el reducto de $\mathfrak{N}$ al tipo $\rho_< = \{<, s, 0\}$. Propongamos, como antes, una axiomatización de Th $\mathfrak{N}_<$. Consideremos los siguientes enunciados de tipo $\rho_<$:

$$\begin{aligned}
s3 &\;\;\fallingdotseq\;\; \forall y(y \neq 0 \rightarrow \exists x(y = sx))\\
L1 &\;\;\fallingdotseq\;\; \forall x\forall y(x < sy \leftrightarrow x \leq y)\\
L2 &\;\;\fallingdotseq\;\; \forall x(x \not< 0)\\
L3 &\;\;\fallingdotseq\;\; \forall x\forall y(x < y \lor x = y \lor y < x)\\
L4 &\;\;\fallingdotseq\;\; \forall x\forall y(x < y \rightarrow y \not< x)\\
L5 &\;\;\fallingdotseq\;\; \forall x\forall y\forall z(x < y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z))
\end{aligned}$$

Aquí, por supuesto, $x \leq y$ abrevia $(x < y \lor x = y)$ y $x \not< y$ abrevia $\neg(x < y)$. Sea $A_L = \{s3, L1, L2, L3, L4, L5\}$. Evidentemente, $A_L \subseteq$ Th $\mathfrak{N}_<$ y A_L es decidible (de hecho, es finito). Entonces, tenemos que Cn $A_L \subseteq$ Th $\mathfrak{N}_<$. También aquí se da la igualdad.

Proposición 2.1. *Las siguientes son consecuencias de A_L:*

(i) $\forall x(x < sx)$

(ii) $\forall x(x \not< x)$

(iii) $\forall x \forall y(x \not< y \leftrightarrow y \leq x)$

(iv) $\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow sx < sy)$

(v) $s1 \leftrightharpoons \forall x(sx \neq 0)$

(vi) $s2 \leftrightharpoons \forall x \forall y(sx = sy \to x = y)$

(vii) $\forall x(x < s^n x)$ *para* $n \in \mathbb{Z}^+$

(viii) $s4.n \leftrightharpoons \forall x(s^n x \neq x)$ *para* $n \in \mathbb{Z}^+$

Demostración. (i) Basta sustitir y por x en $L1$.

(ii) Basta sustitir y por x en $L4$, y usar *consequentia mirabilis.*

(iii) Observemos que "$\rightarrow$"es una reformulación de $L3$. La contrapositiva de "$\leftarrow$"se sigue de $L4$ y de (ii).

(iv) Tenemos, en virtud de $L1$ y de (iii), que A_L prueba lo siguiente:

$$\begin{aligned} x < y &\leftrightarrow y \nleq x \\ &\leftrightarrow y \not< sx \\ &\leftrightarrow sx \leq y \\ &\leftrightarrow sx < sy \end{aligned}$$

(v) Se sigue de $L2$ y de (i).

(vi) La contrapositiva se sigue de $L3$, (iv) y (ii).

(vii) Por inducción débil en el metalenguaje sobre n. La base se tiene por (i) y el paso inductivo por $L5$.

(viii) Se sigue de (vii) y de (ii).

□

Así, todo modelo de A_L restringido a ρ_s es modelo de A_s.
La prueba del siguiente teorema puede consultarse en [E, Teorema 32A].

Teorema 2.2. *La teoría Cn A_L admite eliminación de ciantificadores.*

Corolario 2.3. *(a) Cn A_L es una teoría completa y decidible.*

(b) *Cn* $A_L = $ *Th* $\mathfrak{N}_<$.

(c) *Th* $\mathfrak{N}_<$ *es una teoría axiomática.*

Demostración. Es análoga a la de 1.8, con la novedad de que, al probar (i), se tiene que un enunciado atómico de $\mathscr{L}_{\rho_<}$ puede ser de la forma $\bar{k} = \bar{l}$ o bien de la forma $\bar{k} < \bar{l}$. El caso de la igualdad se trata como en la prueba de 1.8 (pues $s1$ y $s2$ son consecuencias de A_L), pero el caso de la desigualdad es nuevo. Tenemos que $\bar{k} < \bar{l}$ es deducible a partir de A_L si $k < l$ (por 2.1(vii)), pero es refutable a partir de A_L si $l \leq k$ (por 2.1(iii)). □

3. La Estructura $\mathfrak{N}_+$

Consideremos por último el reducto de $\mathfrak{N}$ al tipo $\rho_+ = \{<, s, +, 0\}$, que es la estructura $\mathfrak{N}_+ = \langle \mathbb{N}; <_\mathbb{N}, s_\mathbb{N}, +_\mathbb{N}, 0_\mathbb{N} \rangle$. No trataremos de axiomatizar a Th $\mathfrak{N}_+$. En vez de eso, veamos directamente su decidibilidad.

Teorema 3.1 (Presburger, 1929)**.** *La teoría Th $\mathfrak{N}_+$ es decidible.*

Demostración. Expandimos el lenguaje $\mathscr{L}_{\rho_+}$ con una letra predicativa binaria, $\equiv_k$, para cada $k \geq 2$, y consideramos la interpretación del nuevo lenguaje, $\rho_\equiv$, dada por $\mathfrak{N}^\equiv = \langle \mathbb{N}; <_\mathbb{N}, (\equiv_2)_\mathbb{N}, (\equiv_3)_\mathbb{N}, (\equiv_4)_\mathbb{N}, \ldots, s_\mathbb{N}, +_\mathbb{N}, 0_\mathbb{N} \rangle$, donde para $k \geq 2$, $(\equiv_k)_\mathbb{N}$ es la relación binaria de congruencia módulo k. Resulta que Th $\mathfrak{N}^\equiv$ admite eliminación de cuantificadores, cosa que está probada con detalle en [E, Teorema 32E]. Así, si $\sigma \in \mathscr{L}^0_{\rho_+} \subseteq \mathscr{L}^0_{\rho_\equiv}$, tenemos, por supuesto, que $\mathfrak{N}_+ \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{N}^\equiv \models \sigma$. Sabemos que hay un procedimiento efectivo para hallar $\tau \in \mathscr{L}^0_{\rho_\equiv}$, τ sin cuantificadores, tal que $\mathfrak{N}^\equiv \models (\sigma \leftrightarrow \tau)$. Para saber si $\mathfrak{N}^\equiv \models \tau$ o no, basta estudiar los enunciados atómicos de $\mathscr{L}_{\rho_\equiv}$, como en la prueba de 1.8(a). Un enunciado atómico de este lenguaje es una igualdad, una desigualdad o una congruencia entre dos términos cerrados. Todo término cerrado puede ser puesto en forma de un numeral (es decir, hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{N}^\equiv$ es modelo del enunciado que afirma que el término es igual a $\bar{n}$). Y, por ejemplo, $\mathfrak{N}^\equiv \models (\bar{n} \equiv_m \bar{p})$ si y sólo si $n \equiv_m p$. □

Corolario 3.2. *La teoría Th $\mathfrak{N}_+$ es axiomática.*

Demostración. Como se argumentó en la demotración de 1.8(c), toda teoría decidible es axiomática. □

Referencias

[E] Enderton, H.B., A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition.

Hecho con LaTeX.