Lógica Matemática III
Tarea-Examen I.

Prof. Rafael Rojas Barbachano

29 de septiembre de 2015

Demuestre los siguientes resultados:

1. La función factorial es recursiva.
2. La funcion predecesor es recursiva.
3. La función exponencial es recursiva.
4. $res(x, y)$ el residuo de dividir x entre y, es recursiva.
5. $coc(x, y)$ el cociente de dividir x entre y, es recursiva.
6. $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que a cada natural le asocia el numero de divisores, es recursiva.
7. $\mathfrak{n} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que a cada natural le asocia el numero de primos menores o iguales que el, es recursiva.
8. $min\{x_1, \ldots, x_n\}$ el mínimo de n números, es recursiva.
9. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva
$$\sum_{u<i<v} f(x_1, \ldots, x_n, i)$$
10. Se $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva, entonces
$$\prod_{y<z} f(x_1, \ldots, x_n, y)$$
Es recursiva.

11. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ es recursiva

$$\prod_{u<i<v} f(x_1, \ldots, x_n, i)$$

12. Si $f(x, y, z)$ es una función recursiva y $k \in \mathbb{N}$ entonces $g(x, y) = f(x, y, k)$ es una función recursiva.

13. Demuestre que Si $G' : \mathbb{N}^l \longrightarrow \mathbb{N}$ y $H' : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ son funciones recursivas entonces $F' : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ obtenida por el Método de Recursión' produce una función recursiva.

14. Pruebe que las definiciones para funciones recursivas concuerdan (las que en las notas de Rafael se mencionan como primer y segunda forma), es decir prueben que f es recursiva de primer forma syss lo es de la segunda.

15. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función recursiva. Demuestre que $g(x, n) = f(f(f \ldots (f(x) \ldots)$ (aplicar f $n + 1$-veces a x), es recursiva.

16.

17. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función recursiva primitiva. Si $A = \{x \in \mathbb{N} : f(x) \neq f(y) \textit{ para todo } y < x\}$, entonces A es recursivo.

18. Pruebe que el conjunto de los números primos es recursivo.

19. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es recursiva, entonces $\exists y < zR(x_1, \ldots x_n, y)$ y $\forall y < zR(x_1, \ldots x_n, y)$ son recursivas.

20. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es recursiva, entonces $\mu_{y<z}R(x_1, \ldots x_n, y)$ es recursiva.

21. Sean $f_1, \ldots, f_m \colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ y $\{R_i(x_1, \ldots, x_n)\}_{i=1}^n$ una partición de $\mathbb{N}^n$. Si $f_1, \ldots, f_m$ son funciones recursivas y cada R_i es recursiva, entonces $f \colon \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$f(k_1, \ldots, k_n) = f_i(k_1, \ldots, k_n)$$

si $R_i(k_1, \ldots, k_n)$, es una función recursiva.

22. Sea A_L el conjunto con las siguientes fórmulas:

- $S_3 \rightleftharpoons \forall x(x \neq 0 \to \exists y(sy = x))$
- $L_1 \rightleftharpoons \forall x \forall y(x < sy \leftrightarrow x \leqslant y)$
- $L_2 \rightleftharpoons \forall x \neg(x < 0)$
- $L_3 \rightleftharpoons \forall x \forall y(x < y \lor x = y \lor y < x)$
- $L_4 \rightleftharpoons \forall x \forall y(x < y \to \neg(y < x))$
- $L_5 \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z((x < y \& y < z) \to x < z)$

Pruebe que A_L admite eliminación de cuantificadores.