Un sistema axiomático para la Aritmética AP

Utilizaremos el Sistema Formal de Mendelson, conocido como **L**.

Nuestro lenguaje formal de primer órden $\mathcal{L}_{AP}$, cuyo tipo de semejanza es:

$$\rho = \left\{f_+ \, , f_\cdot \, , f_s\right\} \cup \{c_0\}$$

Queda descrito como sigue,

$$\mathcal{L}_{AP} = \rho \cup \left\{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{ \ \approx \ \right\} \cup \left\{\neg \, , \ \to \ \right\} \cup \left\{ \ \forall \ \right\} \cup \left\{ \,) \, , \, (\, , \, ' \right\}$$

Reglas de Inferencia:

Modus Ponens: $\dfrac{\begin{matrix}\alpha \\ (\alpha \to \beta)\end{matrix}}{\beta}$ **y** **Generalización**: $\dfrac{\alpha}{\forall x \alpha}$

Axiomas Lógicos:

- **AL$_1$** : $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- **AL$_2$** : $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$
- **AL$_3$** : $\big(\neg\alpha \to \neg\beta\big) \to \big((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha\big)$
- **AL$_4$** : $\forall x \alpha \to \alpha\big(x / \tau\big)$:
  donde τ es un término libre para la variable x, en la fórmula α.
- **AL$_5$** : $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x \beta)$:
  donde la variable x no ocurra libre en α.
- **AL$_6$** : $\forall v_0(v_0 \approx v_0)$.
- **AL$_7$** : $\forall x \forall y\Big(x \approx y \to \Big(\alpha\big(x, x\big) \to \alpha\big(x, y\big)\Big)\Big)$:
  Donde x y y son variables, $\alpha\big(x, x\big)$ es cualquier fórmula y $\alpha\big(x, y\big)$ se obtiene a partir de $\alpha\big(x, x\big)$, al sustituir algunas, no necesariamente todas, las ocurrencias libres de x por y; con la condición adicional de que y sea libre para x en $\alpha\big(x, x\big)$.

Axiomas Propios (Aritmética de Peano):

- **AP$_1$** : $\forall v_0\Big(\neg\Big(f_s(v_0)\ \approx\ c_0\Big)\Big)$
- **AP$_2$** : $\forall v_0 \forall v_1\Big(\ \Big(f_s(v_0)\ \approx\ f_s(v_1)\Big) \rightarrow \Big(v_0\ \approx\ v_1\Big)\ \Big)$
- **AP$_3$** : $\forall v_0\Big(f_+\Big(v_0,\ c_0\Big)\ \approx\ v_0\Big)$
- **AP$_4$** : $\forall v_0 \forall v_1\Big(f_+\Big(v_0, f_s(v_1)\Big)\ \approx\ f_s\Big(f_+\Big(v_0,\ v_1\Big)\Big)\Big)$
- **AP$_5$** : $\forall v_0\Big(f_\cdot\Big(v_0,\ c_0\Big)\ \approx\ c_0\Big)$
- **AP$_6$** : $\forall v_0 \forall v_1\Big(f_\cdot\Big(v_0, f_s(v_1)\Big)\ \approx\ f_+\Big(f_\cdot\Big(v_0,\ v_1\Big),\ v_1\Big)\Big)$
- **PI** : $\alpha(c_0) \rightarrow \Big(\forall x\Big(\alpha(x)\ \rightarrow\ \alpha(f_s(x))\Big)\ \rightarrow\ \forall x \alpha(x)\Big)$