I. Argumento de Gödel.

a) Escenario Histórico.

. . .

En resumen, el trabajo que se tiene que desarrollar es:

Solo usando procedimientos **finitistas**. (P.E. NO usar AE)

1. Dar una axiomatización para la aritmética, $AxArit$, junto con una prueba de consistencia absoluta.

2. Para cualquier enunciado σ, escrito en un lenguaje formal adecuado, se debe tener:

σ es verdad en la aritmética (informal) syss $AxArit \vdash \sigma$.

Si se lograra esto:

1. **EXISTENCIA** se entendería como Posibilidad Lógica: **CONSISTENCIA**

POICARE (1905):
"...en matemáticas, la palabra existir NO puede tener más que un significado, significa *exento de contradicción"*

2. **VERDAD** $\rightleftharpoons$ **DEMOSTRABILIDAD**

Gödel (**1931**): ¡¡¡ **NO** !!!

b) **Heurística**.

Kurt Gödel (1906-1978).

Gödel piensa que si la respuesta fuera afirmativa, entonces “La Matemática se volvería una máquina hacedora de teoremas” y creía que era mucho más que eso.

A grosso modo lo que prueba es lo siguiente: Si $AxArit$ es un conjunto de axiomas formales, para la aritmética, donde hay un método efectivo para decidir cuando un enunciado es un axioma o no lo es, entonces:

1. $CON(AxArit) \Rightarrow$ Hay un enunciado σ tal, que $AxArit \nvdash \sigma$ y $AxArit \nvdash \neg\sigma$.
Es decir, bajo la suposición de la consistencia de la Aritmética (formalizada), ésta es incompleta.

2. $CON(AxArit) \Rightarrow \left[AxArit \nvdash con(AxArit) \right]$.
Es decir, bajo la suposición de la consistencia de la Aritmética (formalizada), no se puede probar su propia consistencia.

Gödel se basa en dos ideas para llevar a cabo su prueba. La segunda viene en ayuda para llevar a cabo la primera. Esta es,

I. **La paradoja del Mentiroso**.

Una de las formas de la paradoja es:

“Yo miento”

o, equivalentemente,

“Esta oración es falsa”

Gödel la piensa de la siguiente manera:

“Este enunciado es indemostrable, en la aritmética (formalizada)”

o bien,

“Yo soy indemostrable”

obviando que se trata en la Aritmética formalizada.

Habrá pues, lograr escribir un enunciado, digamos σ_G, en un Lenguaje formal (de primer Orden), tal que al interpretarlo diga:

"El enunciado σ_G es indemostrable en $AxArit$".

Y así tendríamos que,

- Si $AxArit \vdash \sigma_G$, entonces σ_G es falso.
  Es decir, se demostraría algo falso.
- Si $AxArit \nvdash \sigma_G$, entonces σ_G es verdadero.
  Es decir, dejaríamos de probar algo verdadero.

II. La paradoja de Richard.

- Richard en 1905 y Berri en 1906

El argumento de la paradoja va más o menos así:

1. Algunas propiedades de los números naturales pueden definirse en el español (solo $\aleph_0$ de las $2^{\aleph_0}$ que hay), consideremos a todas ellas pero sin repetirlas.

2. Demos un orden a las propiedades, o mejor dicho, las definiciones, por ejemplo por orden lexicográfico. Así tenemos una lista (numerable) de todas ellas:

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots$$

3. Definición. Diremos que un número $k \in \mathbb{N}$ es *Richardiano* syss $P_k(k)$ es falso. O si se prefiere, k **no** tiene la propiedad P_k

4. La propiedad de "ser richardiano" es una propiedad de los números naturales y está escrita en español.

5. Como en la lista dada en **2**. están **todas** las propiedades que se pueden escribir en español, hay un $r \in \mathbb{N}$ tal, que $P_r(x)$ es la definición de "x es richardiano".

6. ¿El número r es richardiano?

Se tiene que

r es richardiano syss r no es richardiano

Lo cual es absurdo.

La paradoja desaparece al darse cuenta uno de que la propiedad "ser richardiano" pertenece al Metalenguaje y no al lenguaje objeto (¿por qué? ¡probarlo!).