c) Argumento de Gödel.

Supongamos que tenemos una formalización de la aritmética, es decir tenemos un conjunto de axiomas, $AxArt$, enunciados de un lenguaje formal $\mathcal{L}_{Art}$. Supomgamos también qu e éste es numerable. La idea subyacente a la prueba de Gödel va de la siguiente manera.

1. Considere el conjunto,

$$\mathcal{L}^1_{Art} = \left\{\varphi(x) \in FRM_{Art} \;/\; x \text{ es la única variable libre de } \varphi\right\}$$

2. Bien ordenamos a todas las fórmulas de $\mathcal{L}^1_{Art}$. Digamos,

$$\varphi_0(x_0),\ \varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2), \ldots$$

3. Definición. Sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que el número k es *Gödeliano* syss

$$AxArit \nvdash \varphi_k\left(x_k / \overline{k}\right)$$

donde $\overline{k}$ es el símbolo formal para el número k.

4. La propiedad de "ser gödeliano", la denotaremos por $\mathcal{G}$, pertenece al Metalenguaje. Tenemos que

$$\mathcal{G} = \left\{k \in \mathbb{N} \;/\; k \text{ es gödeliano}\right\} = \left\{k \in \mathbb{N} \;/\; AxArit \nvdash \varphi_k\left(x_k / \overline{k}\right)\right\}$$

es una propiedad de los números naturales $(\mathbb{N})$, pertenece a la aritmética informal y permanece, no cambia, mientras no se alteren ni los axiomas $(AxArit)$, ni la numeración dada en **2**.

Supongamos ahora que hay una fórmula $\gamma(x) \in \mathcal{L}^1_{Art}$ que funciona (diremos más adelante que γ *expresa* o *representa* a $\mathcal{G}$, en $AxArit$) como sigue:

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que,

a. Si $n \in \mathcal{G}$, entonces $AxArit \vdash \gamma\left(x / \overline{n}\right)$..$(*)$

b. Si $n \notin \mathcal{G}$, entonces $AxArit \vdash \neg\gamma\left(x / \overline{n}\right)$......................................$(**)$

5. Puesto que $\gamma(x) \in \mathcal{L}^1_{Art}$, hay un $g \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(x) \leftrightharpoons \varphi_g(x_g)$.
Así tenemos,

$$\begin{aligned} \varphi_g\left(x_g / \overline{g}\right) \quad &\leftrightharpoons \quad g \text{ es gödeliano} \\ &\leftrightharpoons \quad AxArit \nvdash \varphi_g\left(x_g / \overline{g}\right) \\ &\leftrightharpoons \quad \text{"Soy indemostrable, en } AxArit\text{"} \end{aligned}$$

Pongamos $\sigma_g \leftrightharpoons \varphi_g\left(x_g / \overline{g}\right)$.

6. Bajo la **suposición** de la *Consistencia* de $AxArit$, abreviado $CON(AxArit)$, tenemos:

a. Si $AxArit \vdash \sigma_g \;\Rightarrow\; AxArit \nvdash \neg\sigma_g$ $\quad CON(AxArit)$

$\Rightarrow\; g \in \mathcal{G}$ $\quad (**)$

$\Leftrightarrow\; AxArit \nvdash \sigma_g$ $\quad$ Def. $\mathcal{G}$

$$\therefore\; AxArit \nvdash \sigma_g$$

Puesto que la "interpretación" de σ_g es "soy indemostrable", resulta ser un enunciado verdadero, pero no-demostrable en $AxArit$.

b. Si $AxArit \vdash \neg\sigma_g \;\Rightarrow\; AxArit \nvdash \sigma_g$ $\quad CON(AxArit)$

$\Leftrightarrow\; g \in \mathcal{G}$ $\quad$ Def. $\mathcal{G}$

$\Rightarrow\; AxArit \vdash \sigma_g$ $\quad (*)$

$\Rightarrow\; AxArit \nvdash \neg\sigma_g$ $\quad CON(AxArit)$

$$\therefore\; AxArit \nvdash \neg\sigma_g$$

Con esto tenemos que,

$CON(AxArit) \Rightarrow \sigma_g$ es un *Indecidible* para $AxArit$

Y por tanto,

$CON(AxArit) \Rightarrow AxArit$ es Incompleta

Resumiendo. Para obtener el resultado, evitamos la paradoja de Richard, suponiendo que el conjunto $\mathcal{G}$ es **representable** en $AxArit$.

El Trabajo consistiría en:

1. Ciertas propiedades o relaciones (y operaciones) metalingüísticas —como ser teorema, ser una prueba, ser consecuencia de …, ser axioma lógico, ser axioma propio, ser término, etc— deberán ser traducibles a propiedades o relaciones aritméticas.

Aquí la respuesta es más o menos clara, lo que hay que hacer es **codificar**. Si a cada símbolo, a cada sucesión de símbolos y a las sucsesiones de sucesiones de símbolos les asociamos números, entonces las propiedades o relaciones metaligüísticas se traducirán en propiedades o relaciones entre números.

2. Algunas propiedades y operaciones aritméticas, al menos las que nos interesan, deberán ser "capturadas" en el lenguaje formalizado de la aritmética.

Más en general ¿qué relaciones y operaciones de la aritmética informal son representables en una formalización de la aritmética?

Aquí la respuesta es: **Las Funciones y Relaciones Recursivas**.