Numeración de Gödel

Nuestro lenguaje formal de primer órden para la aritmética, $\mathcal{L}_{AP}$, cuyo tipo de semejanza es:

$$\rho = \left\{f_+ , f_\cdot , f_s\right\} \cup \{c\}$$

donde $f_s \in \mathcal{F}_1$, $f_+ , f_\cdot \in \mathcal{F}_2$ y $c \in \mathcal{C}$; queda descrito como sigue,

$$\mathcal{L}_{AP} = \rho \cup \left\{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{ \ \approx \ \right\} \cup \left\{\neg , \ \to \ \right\} \cup \left\{ \ \forall \ \right\} \cup \left\{ \ ) \ , \ (\ , \ ' \ \right\}$$

Queremos una función que a cada símbolo, a cada expresión y a cada sucesión finita de expresiones, le corresponda un único número natural

$$g : \mathcal{L}_\rho \cup EXP_\rho \cup \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho \to \mathbb{N}$$

Para que sea una "buena" codificación debe de cumplir con,

1. La función g es inyectiva. Dos elementos del dominio, no les puede tocar el mísmo número.

2. Si $k \in \mathbb{N}$, debemos saber si $k \in IMG(g)$ o no y en caso afirmativo, saber de quién es imagen. Es decir tener una buena de–codificación.

Daremos un ejemplo de una numeración. Para ello lo haremos en tres pasos.

I. Sea $g_1 : \mathcal{L}_{AP} \to \mathbb{N}$, dada por la siguiente regla.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
(& \mapsto & 3 & c & \mapsto & 17 \\
) & \mapsto & 5 & f_s & \mapsto & 19 \\
' & \mapsto & 7 & f_+ & \mapsto & 21 \\
\approx & \mapsto & 9 & f_\cdot & \mapsto & 23 \\
\neg & \mapsto & 11 & v_0 & \mapsto & 25 \\
\to & \mapsto & 13 & \vdots & & \\
\forall & \mapsto & 15 & v_n & \mapsto & 25 + 2n
\end{array}$$

Si $s \in \mathcal{L}_{AP}$, la imágen de s bajo la función g_1, es decir a $g_1(s)$, se le llama *el número de gödel del símbolo* s.

Observaciones .

1. La $IMG(g_1) = 2\mathbb{N} + 1$

2. La función g_1 cumple con las condiciones exigidas.

II. Sea $e \in EXP_\rho$. El *Número de Secuencia de* e, denotado por $g_2(e)$, está dado por la siguiente regla:

$$g_2(e) = P_0^{g_1(s_0)} \cdot P_1^{g_1(s_1)} \cdot \ \dots \ \cdot P_n^{g_1(s_n)}$$

Donde $s_0, \dots, s_n \in \mathcal{L}_{AP}$ tales que $e \leftrightharpoons s_0 \dots s_n$ y $P_0, P_1, \dots, P_n$ son los primeros $n+1$ primos en orden ascendente. (Así, $P_0 = 2,\ P_1 = 3,\ P_2 = 5,\ \dots$)

Con esto tenemos que

$$g_2 : EXP_\rho \to \mathbb{N}$$

Observaciones .

1. La $IMG(g_2) \subseteq 2\mathbb{N}$. Si $e \in EXP_\rho$, entonces el número de secuencia de e, $g_2(e)$, es un número par cuya descomposición en primos tiene como exponentes números impares.

2. La función g_2 cumple con las condiciones exigidas.

3. $IMG(g_2) \cap IMG(g_1) = \emptyset$

4. Sea $s \in \mathcal{L}_{AP}$. Al símbolo s lo podemos ver como solamente un símbolo o como una expresión (como una sucesión finita de símbolos, de hecho una sucesión de símbolos de longitud 1). Por lo que le corresponde –según sea el caso– uno y solo uno de los números $g_1(s)$ o $g_2(s)$ $(= 2^{g_1(s)})$.

III. Definimos $g_3 : \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho \to \mathbb{N}$ como sigue: Para $e_0, e_1, \dots, e_n \in EXP_\rho$, sea

$$g_3\big(e_0\ e_1\ \dots\ e_n\big) = P_0^{g_2(e_0)} \cdot P_1^{g_1(e_1)} \cdot \ \dots \ \cdot P_n^{g_2(e_n)}$$

donde $P_0, P_1, \dots, P_n$ son los primeros $n+1$ primos en orden ascendente.

Observaciones .

1. Si $S \in \overset{\omega}{\smile}EXP_\rho$, entonces $g_3(S)$ es un número par, cuya descomposición en primos tiene como exponentes números pares.

2. La función g_3 cumple con las condiciones.

3. $IMG(g_3) \cap IMG(g_1) = \emptyset$ y $IMG(g_3) \cap IMG(g_2) = \emptyset$

4. Si $s \in \mathcal{L}_{AP}$, entonces según se considere, como un símbolo, como una expresión o como una sucesión, de longitud 1, de una expresión con un solo símbolo, le corresponde uno y solo un número, $g_1(s)$ o $g_2(s)$ o $g_3(s)$. Ocurre algo similar para las expresiones; si $e \in EXP_\rho$, entonces le corresponde uno y solo un número $g_2(e)$ o $g_3(e)$.

Con todo lo anterior, podemos definir la función

$$g = g_1 \cup g_2 \cup g_3$$

la cual resulta ser una función tal que,

$$g : \mathcal{L}_\rho \cup EXP_\rho \cup \overset{\omega}{\smile} EXP_\rho \to \mathbb{N}$$

Y es una "buena" codificación.

Ejemplos:

1. Considere la siguiente ρ–expresión (en realidad un ρ–término),

$$e \doteqdot f_+(v_0,\ c)$$

su número de secuencia de e, $g_2(e)$, es

$$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5^{21} \cdot 7^7 \cdot 11^{17} \cdot 13^5$$

2. Considere la fórmula atómica,

$$\alpha \doteqdot (f_+(v_0,\ c) \approx v_0)$$

El número de secuencia de α, $g_2(\alpha)$, es

$$2^3 \cdot 3^{21} \cdot 5^3 \cdot 7^{21} \cdot 11^7 \cdot 13^{17} \cdot 17^5 \cdot 19^9 \cdot 23^{25} \cdot 29^5$$

3. Considere el ρ–enunciado,

$$\sigma \doteqdot (\forall v_0 (f_+(v_0,\ c) \approx v_0))$$

El número de secuencia de σ, $g_2(\sigma)$, es

$$2^3 \cdot 3^{15} \cdot 5^{25} \cdot 7^3 \cdot 11^{21} \cdot 13^3 \cdot 17^{21} \cdot 19^7 \cdot 23^{17} \cdot 29^5 \cdot 31^9 \cdot 37^{25} \cdot 41^5 \cdot 43^5$$