REPRESENTABILIDAD EN EL SISTEMA AP

Recordemos la definición –metalingüistica– del *Numeral de un numero natural.* Ésta se dá recursivamente como sigue,

I. $\overline{0} = c_0$

II. $\overline{n^+} = f_s(\overline{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Definición$_1$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$. Diremos que R es *Expresable (en AP)* syss hay una $\alpha_R \in FRM_{AP}$ con exactamente n variables líbres, digamos $x_1, \ldots, x_n$ tal que cualesquiera sean $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, se tiene:

R$_1$. Si $R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\vdash_{AP} \alpha_R\left(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}\right)$, o

R$_2$. Si $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\vdash_{AP} \neg\alpha_R\left(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}\right)$.

Ejemplo$_{\mathbf{R}}$:

1. La Identidad, $\left\{\langle a, a\rangle \ / \ a \in \mathbb{N}\right\}$, es expresable, por la fórmula:

$$\alpha_=(v_0, v_1) \rightleftharpoons (v_0 \approx v_1)$$

Tendríamos que probar que para n y m números, se tiene

R$_1$. Si $n = m$, entonces $\vdash_{AP} (\overline{n} \approx \overline{m})$

R$_2$. Si $n \neq m$, entonces $\vdash_{AP} \neg(\overline{n} \approx \overline{m})$

2. La relación de orden, $a < b$, es expresable en AP, por la fórmula:

$$\alpha_<(v_1, v_2) \leftrightharpoons \exists v_3\Big(\neg(v_3 \approx c_0) \ \& \ \left(f_+(v_1, v_3) \approx v_2\right)\Big)$$

3. La divisibilidad, $a \mid b$, es expresable en AP, por la fórmula:

$$\alpha_|(v_1, v_2) \leftrightharpoons \exists v_3 \ (v_2 \approx f_.(v_1, v_3))$$

4. El ser primo es expresable en AP, por la fórmula: $\alpha_P(v_0)$

$$\alpha_<(\overline{1}, v_0) \ \& \ \forall v_1\Big((\alpha_<(\overline{1}, v_1) \ \& \ \alpha_|(v_1, v_2)) \ \rightarrow \ (v_1 \approx v_2)\Big)$$

o también,

$$\alpha_<(\overline{1}, v_0) \ \& \ \forall v_1\Big(\alpha_|(v_1, v_2) \ \rightarrow \ ((v_1 \approx \overline{1}) \vee (v_1 \approx v_2))\Big)$$

Antes de dar la definición de representabilidad de funciones quedemos claros en una abreviatura que usaremos. Entenderemos por $\exists! x \ \alpha(x)$ como una abreviatura de la fórmula,

$$\exists x \ \alpha(x) \ \& \ \forall x \forall y \left(\alpha(x) \ \& \ \alpha\left(x / y\right) \ \rightarrow \ x \approx y\right)$$

donde y es la primera variable que no ocurre en α. Otra lógicamente equivalente a ésta y que podríamos tambien utilizar es,

$$\exists x \left(\alpha(x) \ \& \ \forall y \left(\alpha\big(x / y\big) \ \rightarrow \ x \approx y\right)\right)$$

usando el mismo criterio para la variable y.

Definición$_2$. Sea $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, con $n > 0$. Diremos que f es *Representable en AP* syss hay una $\alpha_f \in FRM_{AP}$ con exactamente $n+1$ variables líbres, digamos $x_1, \ldots, x_n, y$ y es tal que,

Para cualesquiera que sean $k_1, \ldots, k_n, \ m \in \mathbb{N}$, se tiene:

F$_1$. Si $f(k_1, \ldots, k_n) = m$, entonces $\vdash_{AP} \ \alpha_f\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}, \ y / \overline{m}\big)$. Y

F$_2$. $\vdash_{AP} \ \exists! y \ \alpha_f\big(x_1 / \overline{k_1}, \ldots, x_n / \overline{k_n}, \ y\big)$.

Si en lugar de **F**$_2$. exigimos:

F'$_2$. $\vdash_{AP} \ \exists! y \ \alpha_f\big(x_1, \ldots, x_n, \ y\big)$.

Se dice que f es *Fuertemente Representable en AP*.

Estas dos nociones coinciden.

Proposición$_1$. Sea $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$. Tenemos que,

f es fuertemente representable en AP syss f es representable en AP.

La prueba es un tanto ardua y nosotros la omitimos. Para ver la que se le ocurrió a V. H. Dyson, ésta se encuentra en Mendelson, proposición 3.12.

Ejemplo$_F$:

1. La suma, $+$, es representable por la fórmula

$$\alpha_+\big(v_0, \ v_1, \ v_2\big) \rightleftharpoons \Big(f_+\big(v_0, \ v_1\big) \ \approx \ v_2\Big)$$

Tendríamos que probar que,

F$_1$. Si $n + m = p$, se tiene $\vdash_{AP} \ \Big(f_+\big(\overline{n}, \ \overline{m}\big) \ \approx \ \overline{p}\Big)$ o bien $\vdash_{AP} \ \Big(f_+\big(\overline{n}, \ \overline{m}\big) \ \approx \ \overline{n+m}\Big)$

F$_2$. $\vdash_{AP} \ \exists! v_2 \Big(f_+\big(\overline{n}, \ \overline{m}\big) \ \approx \ v_2\Big)$ o bien $\vdash_{AP} \ \exists! v_2 \ \Big(f_+\big(v_0, \ v_1\big) \ \approx \ v_2\Big)$

2. La función producto, $\cdot$, es representable por la fórmula

$$\alpha_{\cdot}\big(v_0, \ v_1, \ v_2\big) \rightleftharpoons f_{\cdot}\big(v_0, \ v_1\big) \approx v_2$$

3. La función constante cero, $Z(x) = C_0^1(x) = 0$, es representable por

$$\alpha_Z\big(v_0, \ v_1\big) \rightleftharpoons \Big((v_0 \approx v_0) \ \& \ (v_1 \approx c_0)\Big)$$

4. La sucesor, $\_^{+}$, es representable por

$$\alpha_{\_^{+}}\left(v_0,\ v_1\right) \rightleftharpoons \left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right)$$

F$_1$ Sean $n,m \in \mathbb{N}$ tales, que $n^{+} = m.$ Así, puesto que la identidad es expresable, tenemos $\vdash_{AP}\ \overline{n^{+}} \approx \overline{m}$ y de aqui que, por la definición de numeral, obtenemos $\vdash_{AP} f_s(\overline{n}\,) \approx \overline{m}.$

F'$_2$ Hay que probar dos partes.

$\exists\,]$ Puesto que $f_s(v_0)$ es libre para v_1 en $\left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right)$, por la regla $\exists,$ tenemos que

$$\left(f_s(v_0)\ \approx\ f_s(v_0)\right) \vdash_{AP} \exists v_1 \left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right)$$

Pero sabemos que $\vdash_{AP} \left(f_s(v_0)\ \approx\ f_s(v_0)\right)$, por tanto $\vdash_{AP} \exists v_1 \left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right).$

$!\,]$ P.D. $\vdash_{AP} \left(\alpha_{\_^{+}}\left(v_0,\ v_1\right)\ \&\ \alpha_{\_^{+}}\left(v_0,\ v_2\right)\ \rightarrow\ (v_1 \approx v_2)\right).$

1. $\left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right)$ Ho.
2. $\left(f_s(v_0)\ \approx\ v_2\right)$ Ho.
3. $(v_1\ \approx\ v_2)$ Trans. de $\approx$

Es decir

$$\left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right), \left(f_s(v_0)\ \approx\ v_2\right) \vdash_{AP} (v_1 \approx v_2)$$

Y de esto, por el **MTD**, obtenemos

$$\vdash_{AP} \left(f_s(v_0)\ \approx\ v_1\right)\ \&\ \left(f_s(v_0)\ \approx\ v_2\right) \rightarrow (v_1\ \approx\ v_2)$$

†

Proposición$_2$.

1. Toda función recursiva es representable en AP.

2. Toda relación recursiva es expresable en AP.

Tambien se tiene la conversa.

Proposición$_3$.

1. Toda función representable en AP es una función recursiva primitiva.

2. Toda relación expresable en AP es una relación recursiva primitiva. †