Recursión para $\mathbb{N}$

I) Para toda función $G : A \to A$ y todo $a \in A$, *hay* una *única* **función** F tal que

$$F : \mathbb{N} \to A$$

I) $F(0) = a$

II) $\forall n \in \mathbb{N}[F(n^+) = G(F(n))]$

Observación:

$$F(0) = a \qquad F(2) = G(G(a))$$
$$F(1) = G(a) \qquad F(3) = G(G(G(a)))$$

II). Si $G_1 : A \times \mathbb{N} \to A$ y $a \in A$, entonces hay una única **función** F_1 tal que

$$F_1 : \mathbb{N} \to A$$

I) $F_1(0) = a$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\Big[F_1(n^+) = G_1(F_1(n), n)\Big]$

Observación:

$$F_1(0) = a \qquad F_1(2) = G_1(F_1(1), 1) = G_1(G_1(a,0), 1)$$
$$F_1(1) = G_1(F_1(0), 0) = G_1(a,0) \qquad F_1(3) = G_1(F_1(2), 2) = G_1\Big(G_1(G_1(a,0),1), 2 \Big)$$

Ejemplo: El factorial de un natural:

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

I) $0! = 1$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\Big[n^+! = n! \cdot n^+\Big]$

Basta tomar $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ y $G_1(x,y) = x \cdot y^+$.

III). Versión Paramétrica.

Si P es un conjunto, $G_2 : P \times A \times \mathbb{N} \to A$ y $H : P \to A$, entonces *hay* una *única* **función** F_2 tal que

$$F_2 : P \times \mathbb{N} \to A$$

I) $\forall p \in P \Big[F_2(p,0) = H(p)\Big]$

II) $\forall p \in P \ \forall n \in \mathbb{N}\Big[F_2(p,n^+) = G_2(p, F_2(p,n), n)\Big]$

Ejemplo: La Suma entre Naturales:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

I) $\forall m \in \mathbb{N}\Big[m + 0 = m\Big]$

II) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\Big[m + n^{+} = (m+n)^{+}\Big]$

Basta tomar $P = A = \mathbb{N}$, $H(x) = x$ y $G_2(x,y,z) = y^{+}$.

IV) Si a es un conjunto, ${}^{\underset{\smile}{\omega}}a = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^{n}a$ y $G : \left({}^{\underset{\smile}{\omega}}a\right) \to a$, entonces *hay* una *única* **función** F_3 tal que

$$F_3 : \mathbb{N} \to a$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\Big[F_3(n) = G(F_3 \restriction n)\Big]$$

Observación:

$$F_3(0) = G(F_3 \restriction 0) = G(F_3 \restriction \emptyset) = G(\emptyset) \quad \text{y} \quad F_3(1) = G(F_3 \restriction 1) = G(\{\langle \emptyset, G(\emptyset)\rangle\})$$

Ejemplo: Para obtener la Sucesión de Fibonacci: $1,1,2,3,5,8,13,\ldots,$ basta tomar

$$\text{para } t \in \left({}^{\underset{\smile}{\omega}}a\right),\ G(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } DOM(t) = 0 \\ 1 & \text{si } DOM(t) = 1 \\ t(n) + t(n+1) & \text{si } DOM(t) = n+2 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pues, tendríamos:

$F_3(0) = G(\emptyset) = 1$

$F_3(1) = G(F_3 \restriction 1) = 1$

$F_3(2) = G(F_3 \restriction 2) = F_3(0) + F_3(1) = 1 + 1 = 2$

$F_3(3) = G(F_3 \restriction 3) = F_3(1) + F_3(2) = 1 + 2 = 3$

y ...

V) Si A es un conjunto, $a \in A$ y G una función con $DOM(G) \subseteq A \times \mathbb{N}$ e $IMG(G) \subseteq A$, entonces *hay* una *única* **función** F_4 tal que

0) $DOM(F_4) = \mathbb{N}$ o $DOM(F_4) = k_0^{+}$ donde $k_0 = min\Big\{k \in \mathbb{N}\ /\ (F(k),k) \notin DOM(G)\Big\}$

00) $IMG(F_4) \subseteq A$

I) $F_4(0) = a$

II) $\forall n \in \mathbb{N}\Big[n^{+} \in DOM(F_4) \to [F_4(n^{+}) = G(F_4(n),n)]\Big]$

Ejemplo: Si $X \subseteq \mathbb{N}$, entonces hay una función inyectiva F con $IMG(F) = X$ y tal que $DOM(F) = \mathbb{N}$ o $DOM(F) \in \mathbb{N}$