

Primeras propiedades de las Funciones Recursivas

Proposición₁. Sea $g : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ y sean x_1, \dots, x_n variables distintas. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea z_i alguna de las variables x_1, \dots, x_n . Considere la función

$$f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(z_1, \dots, z_m)$$

Así, si g es una Función Recursiva, también lo será f .

Prueba. Supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, se tiene que $z_i = x_{j_i}$ con $j_i \in \{1, \dots, n\}$. Pero entonces $z_i = \pi_{j_i}^n(x_1, \dots, x_n)$. Así las cosas, tenemos que

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(z_1, \dots, z_m) = g(\pi_{j_1}^n(x_1, \dots, x_n), \dots, \pi_{j_m}^n(x_1, \dots, x_n))$$

y por tanto, f es recursiva ya que se obtiene por Sustitución a partir de la recursiva g y de las Iniciales $\pi_{j_1}^n, \dots, \pi_{j_m}^n$. †

Algunas aplicaciones de este resultado:

1). Permutar variables:

Si $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ es recursiva, entonces

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x_1, x_2) = g(x_2, x_1)$$

es recursiva. Pues, basta tomar $m = 2$, $n = 2$, $z_1 = x_2$ y $z_2 = x_1$.

2). Añadir variables artificiales:

Si $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ es recursiva, entonces

$$f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_3)$$

es recursiva. Pues, basta tomar $m = 2$, $n = 3$, $z_1 = x_1$ y $z_2 = x_3$. La nueva variable x_2 , se le llama *artificial* pues no influye en el valor de $f(x_1, x_2, x_3)$.

3). Repetir variables:

Si $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ es recursiva, entonces

$$f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_1)$$

es recursiva. Pues, basta tomar $m = 3$, $n = 2$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ y $z_3 = x_1$.

La Regla de Sustitución puede ser extendida al caso en que cada H_i puede ser

una función de algunas y no necesariamente todas las variables involucradas:

Proposición₂. (Método de Sustitución') Sea $G : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ y sean x_1, \dots, x_n variables distintas. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean $n_i > 0$ y $H_i^l : \mathbb{N}^{n_i} \rightarrow \mathbb{N}$. Consideremos también a,

$$F^l : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$F^l(x_1, \dots, x_n) = G\left(H_1^l(z_1^1, \dots, z_{n_1}^1), \dots, H_m^l(z_1^m, \dots, z_{n_m}^m)\right)$$

donde $z_j^i \in \{x_1, \dots, x_n\}$.

Así, si G y las H_i^l son Funciones Recursivas, también F es recursiva.

Prueba. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea $H_i : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ la función dada por

$$H_i(x_1, \dots, x_n) = H_i^l(z_1^i, \dots, z_{n_i}^i).$$

Ésta(s) es(son) recursiva(s) por la **Proposición₁**. Pero entonces,

$$F^l(x_1, \dots, x_n) = G\left(H_1(x_1, \dots, x_n), \dots, H_m(x_1, \dots, x_n)\right)$$

la cual resulta ser recursiva ya que se obtiene por Sustitución a partir de la recursiva G y de las recursivas H_1, \dots, H_m . †

También en la regla de Recursión se puede extender.

Proposición₃. (Método de Recursión')

Sean n, k y l números positivos y sean x_1, \dots, x_n variables distintas. Consideremos las funciones $H^l : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ y $G^l : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$, así como también a,

$$F^l : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

- i) $F^l(x_1, \dots, x_n, 0) = H^l(z_1, \dots, z_k)$
- ii) $F^l(x_1, \dots, x_n, y^+) = G^l(w_1, \dots, w_l)$

donde las $z_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ y las $w_j \in \{x_1, \dots, x_n, F(x_1, \dots, x_n, y), y\}$.

Así, si H^l y G^l son Funciones Recursivas, entonces F^l es una Función Recursiva.

Prueba: TAREA. †

Proposición₄. Considere la siguiente definición alternativa de función Inicial:

Son *Iniciales*, las siguientes funciones:

- I) La función Sucesor: $+$
- II) La función Constante Cero: $\mathcal{Z} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall x \mathcal{Z}(x) = 0$
- III) Las funciones Proyección: π_k^n

Toda función recursiva (primitiva) en el primer sentido es la misma que en este segundo.

Prueba: TAREA.

Sugerencia: Basta ver que $\forall k, C_k^n$ es recursiva (usando recursión') y esto se hace por inducción. †

Veamos unos primeros ejemplos de funciones recursivas.

Algunas Funciones Recursivas

Proposición. Las siguientes funciones son recursivas primitivas:

a) La *Predecesor* : $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por:

$$\delta(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sugerencia: $\delta(0) = 0$
 $\delta(x^+) = x$

b) La *Diferencia Positiva* : $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$; dada por:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$$

sugerencia: $x \dot{-} 0 = x$
 $x \dot{-} (y^+) = \delta(x \dot{-} y)$

c) El *Valor Absoluto de la Diferencia* : $|_ - _| : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$; dada por:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x = y \\ y - x & \text{si } x < y \end{cases}$$

sugerencia: $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

d) El *Mínimo de dos Números* : $\min : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$; dada por:

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

sugerencia: $\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

e) El *Mínimo de varios números* : $\min^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$. con $n \geq 2$

sugerencia: Por Inducción: para todo $n \geq 2$, \min^n es una F.R.P. y para ello usar $\min^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \min(\min^n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$.

f) El *Máximo de dos números* : $\max : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$; dada por:

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x > y \\ 0 & \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

sugerencia: $\max(x,y) = y + (x \dot{-} y)$

g) El *Máximo de varios números* : $\max^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$.

h) El *Signo de un número* : $sg : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; dada por:

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sugerencia: $sg(0) = 0$

$sg(x^+) = 1$

i) El *Signo Contrario de un número* : $\overline{sg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; dada por:

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sugerencia: $\overline{sg}(x) = 1 \dot{-} sg(x)$

Antes de pasar a dar los últimos ejemplos, recordemos lo que nos dice,

El Algoritmo de la División para \mathbb{N} :

$$\forall x \forall y \neq 0 \exists! q, r (x = y \cdot q + r \text{ con } r < y)$$

A q y a r se les llaman el *Cociente* y el *Residuo*, respectivamente, de dividir x entre y .

Si bien la división entre “cero” no está definida, a nosotros nos interesa tener definida las funciones **cociente** (*coc*) y **residuo** (*res*) para todo par de naturales que se vayan a dividir. Al dividir un número por “cero”, se les puede asignar cualquier

valor, para nosotros, tomarán el valor de 0.

(Informalmente, convenimos que para cualquier número natural x se tiene, $x = 0 \cdot 0 + 0$.)

j) El *Residuo de dividir x entre y* : $res : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. ($res(x, y) = r$).

k) El *Cociente de dividir x entre y* : $coc : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. ($coc(x, y) = q$).

Prueba: TAREA.

Sugerencia: Resolver primero $res'(x, y)$, $coc'(x, y)$, con la intención de que

$$y = x \cdot coc'(x, y) + res'(x, y)$$

finalmente, $res(x, y) = res'(y, x)$ y $coc(x, y) = coc'(y, x)$.